UNIVERZITA KOMENSKÉHO
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

LE CONVINZIONI DEGLI INSEGNANTI SULL'INFINITO MATEMATICO

Bratislava 2004 **Silvia Sbaragli**

Indice

4.6. Il "senso dell'infinito" 134

Premessa

«La paura dell'infinito è una forma di miopia che distrugge la possibilità di vedere l'infinito attuale, anche se questo nella sua forma più alta ci ha creati e ci mantiene, e nelle sue forme secondarie di transfinito è presente intorno a noi e popola persino le nostre menti».

(Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen*, 1932)

Le riflessioni che seguiranno si riferiscono ad un percorso di ricerca durato vari anni relativo all'infinito matematico; un argomento che ha rappresentato, e rappresenta tutt'ora, un tema affascinante che attrae molti studiosi di diverse discipline. In particolare, in àmbito matematico e in didattica della matematica, l'infinito è stato trattato in diversi modi, rivelandone i passaggi storici più delicati, gli ostacoli epistemologici specifici del concetto stesso e le conseguenti difficoltà che incontrano gli studenti dei diversi livelli scolastici ad affrontare e a costruire questo argomento.

In questa ricerca abbiamo scelto di muoverci in un'ottica nuova e appassionante all'interno della didattica della matematica che punta l'attenzione sulle convinzioni degli insegnanti nei riguardi dell'infinito matematico. Inizialmente abbiamo indagato sulle misconcezioni degli insegnanti di scuola primaria sorrette da immagini mentali erronee che condizionano le loro convinzioni, di conseguenza il loro insegnamento, per poi puntare l'attenzione su quelle degli insegnanti di scuola secondaria, riscontrando così come non vi sia una sostanziale differenza tra le false credenze rilevate presso gli insegnanti dei diversi ordini scolastici.

La tesi è stata divisa in quattro capitoli tutti concernenti problematiche relative all'infinito da diversi punti di vista, ma con un unico filo conduttore comune: la didattica.

Nel primo capitolo si presenta un iter storico-critico condotto in modo cronologico che permette al lettore di evidenziare le fratture, i salti radicali di concezioni, le non continuità, che mettono in evidenza gli ostacoli di carattere epistemologico che fan sì che questo argomento sia difficile da essere concepito, accettato, appreso.

Nel secondo capitolo si propone una breve panoramica degli elementi della didattica della matematica che rientrano con forza nella trattazione di questa tesi. In particolare, abbiamo esplicitato l'ottica nella quale ci porremo, che rientra nell'attuale panorama della ricerca in didattica della matematica di scuola francese che accentra l’attenzione sul fenomeno dell’apprendimento da un punto di vista fondazionale. In questo senso, faremo riferimento a ciò che s’intende oggi per *didattica fondamentale* (Henry, 1991; D’Amore, 1999), ossia a tutto quanto concerne gli elementi di base della ricerca in didattica della matematica che traggono spunto dalle molteplici e complesse analisi del cosiddetto “triangolo della didattica”: insegnante, allievo e sapere. In particolare, mostreremo in dettaglio le chiavi di lettura fondamentali per affrontare l’analisi dei successivi capitoli.

I capitoli 3 e 4 rappresentano il lavoro di ricerca vero e proprio; nel terzo si mettono in evidenza le misconcezioni degli insegnanti di scuola primaria relative all’infinito matematico che si sono evidenziate tramite metodologie di tipo qualitativo: analisi di risposte date a questionari e discussioni successive. I risultati mostrano come l’infinito rappresenti generalmente un concetto sconosciuto gestito solo dall’intuizione e ridotto di solito banalmente ad un’estensione del finito.

Queste constatazioni hanno messo in evidenza come le grandi difficoltà rilevate nella comprensione dell’infinito matematico non siano dovute solamente ad ostacoli epistemologici, ma rafforzate e amplificate anche da ostacoli di tipo didattico derivanti dai modelli intuitivi forniti dagli insegnanti ai propri allievi che rappresentano, a loro insaputa, vere e proprie misconcezioni.

Le stesse false credenze, riportate nel capitolo 4, si sono manifestate anche tra gli insegnanti di scuola secondaria ai quali era stato chiesto di analizzare e di discutere con il ricercatore i TEPs (D’Amore, Maier, 2002) dei loro allievi, concernenti tematiche relative all’infinito.

Abbiamo così evidenziato come questo tema è risultato, fino ad ora, troppo sottovalutato soprattutto come argomento di formazione degli insegnanti ed è proprio da questa mancanza che, a nostro parere, derivano in parte le difficoltà degli studenti di scuola superiore che portano con sé convinzioni antecedenti non idonee ad affrontare le nuove situazioni cognitive.

Di conseguenza, nel quarto capitolo abbiamo evidenziato come negli ultimi anni la nostra attenzione si sia indirizzata nel tentare di inibire e superare i modelli che provocano ostacoli nella mente degli insegnanti, e di conseguenza degli allievi, proponendo corsi di formazione per insegnanti che tengano conto degli aspetti intuitivi e delle peculiarità dell’infinito, oltre che dei risultati rilevati dai ricercatori in didattica della matematica. Questa formazione ha permesso agli insegnanti coinvolti di curare i concetti relativi agli insiemi infiniti, coinvolgendo gli allievi in esperienze significative e in attività che permettono di costruire immagini intuitive coerenti con la teoria degli insiemi infiniti.

Inoltre si sono proposte in quest'ultimo capitolo le varie linee di ricerca, presenti e future, verso le quali ci siamo indirizzati e che riguardano in particolare le misconcezioni degli insegnanti e degli allievi relative agli enti primitivi della geometria, analizzate da diversi punti di vista. Questa scelta, in apparenza distante dal mondo dell'infinito, deriva in realtà dalla constatazione che le misconcezioni degli insegnanti e degli allievi relative all'infinito geometrico dipendono in diversi casi da quelle riguardanti gli enti primitivi della geometria.
La sensazione che accomuna l'intera tesi è che questo lavoro di ricerca rappresenta per l'Autore solo l'inizio di un percorso del quale non si intravede la fine, rivelandosi di anno in anno sempre più ricco, profondo e variegato.

Capitolo 1. Un approccio storico critico del tutto elementare al tema dell'infinito

Prima di introdurre l'aspetto didattico riteniamo utile delineare un breve iter storico-critico che richiama in modo del tutto elementare le fasi salienti del lungo e sofferto percorso compiuto dall'infinito matematico. Questo capitolo rappresenterà in seguito un'importante chiave di lettura per capire ciò che sta alla base degli ostacoli epistemologici relativi a questo argomento (vedi paragrafo 2.5); ostacoli che "giustificano" le convinzioni degli insegnanti e degli allievi che saranno messe in evidenza nei capitoli 3 e 4.

Per la trattazione di questo capitolo ci siamo serviti dei seguenti riferimenti bibliografici: Arrigo e D'Amore, 1993; Boyer, 1982; D'Amore, 1994; D'Amore e Matteuzzi, 1975, 1976; Geymonat, 1970; Lolli, 1977; Rucker, 1991; Zellini, 1993 e di altri che saranno citati nel testo. Come impostazione abbiamo scelto di seguire quella individuata da D'Amore (1994), nel suo singolare percorso dovuto ad interpretazioni personali che facciamo nostre.

1.1 La preistoria: dal $^{-}$600 al $^{+}$1800

«C'è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l'Etica; parlo dell'infinito».

[Borges J.L., 1985]

1.1.1 Dall'Antichità al Medioevo

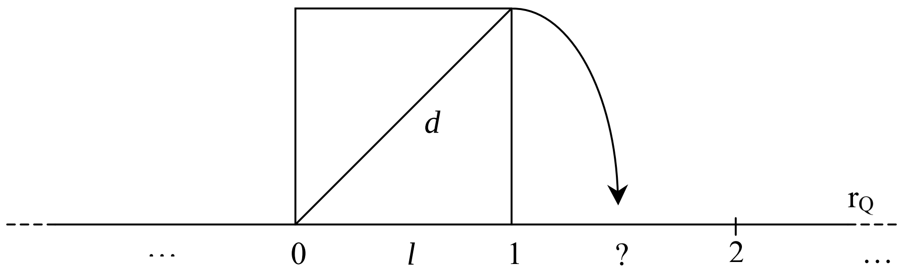
Talete di Mileto ($^{-}$624-$^{-}$548). Identifica l'*origine di tutte le cose* (*arché*) nell'acqua in quanto, per lui, tutto ha alla base della propria natura uno stato di umidità ed a questo stato tutte le cose ritornano.

Anassimandro di Mileto ($^{-}$610-$^{-}$547). Allievo di Talete definì l'*arché* come qualitativamente non definita (richiamando l'idea di indeterminato), divina, immortale, indistruttibile, senza limiti (richiamando l'idea di illimitato), ma non per questo caotica, chiamata: *ápeiron* (infinito). Come sostiene Marchini (2001), pare che ai tempi di Anassimandro fossero ritenuti sinonimi infinito, illimitato e indeterminato.

Anassimene (¯586-¯528). Propone che l'origine delle cose sia l'aria infinita, in quanto l'aria rappresenta meglio di ogni altra sostanza l'illimitatezza e la onnipresenza propria dei principi primordiali.

Si vengono a creare due correnti: quella di coloro che vedono l'infinito in senso negativo: incompleto, imperfetto, privo di confini, indeterminato, fonte di complicazione e confusione (come ad esempio i pitagorici e Aristotele) e quelli che lo vedono in senso positivo come ciò che comprende e riassume in sé tutte le qualità [**Epicuro (¯341 - ¯270)**]. [1]

Pitagora di Samo (¯580-¯504). La Matematica è alla base della spiegazione di tutto l'universo. Tutto è descrivibile attraverso i numeri naturali e tramite i loro rapporti, che sono aggregati di *monadi* le quali sono a loro volta corpuscoli unitari, dotati di grandezza, ma talmente piccoli da risultare non ulteriormente divisibili e, comunque, non nulli.
Dunque, ogni corpo è composto di monadi ma non disposte a caso, bensì secondo un ordine geometrico-aritmetico prestabilito. Pitagora è quindi finitista così come sarà finitista Platone. Nella sua scuola sorge il problema dell'incommensurabilità, originata dalla concezione di poter esprimere tutto come numero naturale di monadi o meglio, come rapporti tra numeri naturali.[2] Esistono casi in cui non è possibile esprimere con un numero razionale il rapporto fra le lunghezze di due segmenti:[3]



[1] Per Epicuro l'infinito è il principio positivo del divenire dei corpi, mentre il principio negativo è il vuoto. Questa affermazione sarà ripresa dalla religione e dalla mistica che attribuiranno un significato ontologico all'infinito.

[2] A questo proposito risulta molto significativa l'affermazione di Platone contenuta nel Teeteto: «*È vergognosa l'ignoranza di chi crede che tutte le coppie di grandezze siano tra loro commensurabili*».

[3] Sarà poi Archita (¯430-¯360) a dimostrare che il rapporto tra questi due segmenti non si può esprimere come rapporto tra due numeri naturali.

La scoperta dell'incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato (Kuyk, 1982), sembra risalire ad Ippaso di Metaponto (V sec. a. C.) che paga questo affronto alla scuola pitagorica con la vita.
La crisi era tra intuizione e ragione ed è forse il primo caso in cui la seconda va in senso contrario alla prima. Gli enti della matematica non sono più sensibili, ma diventano puramente intelligibili, aprendo così la strada all'infinito. Questo rappresenta forse il primo avvio verso la concezione della matematica come appartenente al mondo delle idee che dominerà poi la filosofia greca.

Parmenide di Elea ($^{-}$504).[4] Nel suo Poema: *Perì Physeos (Sulla Natura)* pone in netta antitesi due modi diversi di interpretare la verità: una verità di origine sensibile (*doxa*) e una Verità contrapposta di carattere razionale (*Alétheia*). L'uomo può servirsi della *doxa*, ma solo per il fine supremo di raggiungere l'*Alétheia*. Nella *doxa* si esclude l'infinito per evitare paradossi (es.: lancio di una freccia a pochi passi dalla fine dell'Universo), mentre nell'*Alétheia* che rappresenta la vetta spirituale, la massima conoscenza, l'*essere* unico, immutabile, indivisibile, eterno, immobile si concepisce l'infinito come totalizzante (che comprende tutto), ma *limitato («L'universo è limitato perché se gli mancasse il limite tutto gli mancherebbe»*).

Zenone di Elea (nato circa nel $^{-}$489). Allievo di Parmenide, è riuscito a raccogliere l'eredità del suo maestro, fortificandone le posizioni contro le critiche che le ipotesi di immobilità ed unità dell'essere si erano attirate. Gli argomenti di Zenone sono celeberrimi paradossi che rappresentano confutazioni delle idee di pluralità e movimento (quelli detti: Dicotomia, Achille e la Tartaruga, la Freccia, lo Stadio). Come afferma Marchini (2001): *«Per Zenone il ritenere l'infinito un attributo dell'essere, per l'inesauribilità dell'infinito stesso, comporta irrazionalità ed impossibilità dell'essere. È questa la visione dell'infinito in atto contro cui argomenta»*. Lo stato paradossale di affermazioni concernenti l'infinito ha generato a quei tempi talmente tanta confusione, da portare in seguito Aristotele a vietarne l'uso, per evitare questo *«Scandalo»*. Fu quindi grazie alla posizione astratta di Parmenide e alle creazioni

[4] La vita di Parmenide ha datazioni un po' incerte, ma ricordiamo il $^{-}$504 che corrisponde alla LIX Olimpiade che secondo Diogene Laerzio rappresenta il periodo di massima fioritura dell'opera di Parmenide.

paradossali di Zenone, che i matematici greci sono stati costretti a fare i conti davvero con l'infinito, pur cercando disperatamente di evitarlo.[5]

Melisso di Samo (fine $^{-}$VI sec. - inizio $^{-}$V sec.). Nel tentativo di dimostrare le tesi parmenidee che partono dall'idea dell'*essere unico*, evolve in parte il pensiero del maestro negando che la determinatezza dell'essere implichi la sua finitudine. Concepisce perciò un essere spazialmente infinito, non dovendo ammettere nulla al di fuori di sé.

La ribellione a Parmenide iniziò con i Pluralisti dei quali vale la pena ricordare **Anassagora di Clazomene ($^{-}$500-$^{-}$428)**. Filosofo che dedicò la vita a riflessioni sulla materia e sui suoi componenti, ideando il termine *omeomerie* per indicare elementi infinitesimi, non ulteriormente divisibili, distinguibili tra loro per qualità diverse. Per i nostri scopi risultano significative le seguenti asserzioni contenute nella sua opera *Sulla Natura*: *«Tanto nel grande quanto nel piccolo vi è lo stesso numero di particelle (…) rispetto al piccolo non c'è un minimo, ma c'è sempre un più piccolo, perché l'esistente non può essere annullato (per divisioni successive). Così, rispetto al grande, c'è sempre un più grande, e il più grande è uguale al più piccolo come pluralità, e in se stessa, ogni cosa pensata come somma d'infinite parti infinitesime è insieme grande e piccola»* (in termini moderni, è ovvio che un segmento più corto è incluso in uno più lungo, ma se pensiamo entrambi questi enti come insiemi di punti, allora vedremo che tanto in un segmento più lungo quanto in uno più corto vi è lo stesso numero di punti). Concetto che riprenderemo diverse volte nel corso della storia, ma che sarà rigorosamente sistemato solo dai matematici tedeschi del XIX secolo. Nell'affermazione di Anassagora sono presenti le nozioni di infinito ed infinitesimo, poste a stretto contatto. In certi punti sembra che la suddivisione infinita sia intesa in senso potenziale, in altri punti invece sembra che Anassagora si riferisca ad un infinito attuale.

La ribellione a Parmenide proseguì poi con i Sofisti come: **Protagora di Abdera ($^{-}$485-$^{-}$410)** e **Gorgia di Leontini ($^{-}$483-$^{-}$375)** che affermarono la superiorità dell'esperienza sensibile rispetto alla verità razionale, provocando diversi influssi sulla matematica e sul nostro tema: basti pensare che in base all'esperienza sensibile una circonferenza ed una sua tangente non hanno in comune un solo punto di tangenza, ma un intero tratto.

[5] Dal punto di vista didattico, molte ricerche attuali vertono sul dibattito tra la verità di ragione e la verità sensibile: Hauchart e Rouche, 1987; Nuñez, 1994; Bernardi, 1992a,b.

Seguirono gli Atomisti tra cui: **Leucippo di Abdera ($^{-}$460 circa)** maestro di **Democrito di Abdera ($^{-}$460-$^{-}$360 circa)** secondo i quali il vuoto esiste ed in esso si muovono gli atomi. In particolare Democrito aveva ben distinto i due problemi della infinita divisibilità: da un punto di vista matematico astratto, ogni ente è infinitamente divisibile in parti (in particolare i segmenti ed i solidi), mentre da un punto di vista fisico, le cose cambiano: c'è un limite materiale alla divisibilità ed è un corpuscolo unitario, indivisibile, materiale che è detto atomo; anzi, sembrano esserci più tipi di atomi, di dimensioni diverse.

Aristotele di Stagira ($^{-}$384-$^{-}$322). Così come aveva fatto Platone, e ancora prima Socrate, accetta l'idea parmenidea di un universo limitato e questo è consono alla natura della filosofia greca che ha ribrezzo del disordine causato da una materia in stato caotico: i limiti che racchiudono l'universo, in un certo qual modo lo organizzano sul piano razionale e lo rendono accettabile ad una logica umana: *«… dal momento che nessuna grandezza sensibile è infinita, non è possibile che ci sia il superamento di ogni grandezza determinata, perché in tal caso ci sarebbe qualcosa di maggiore del cielo».*
Per quanto riguarda l'infinito, nella filosofia e nella matematica greca si percepiva un clima di profondo imbarazzo nei confronti di questo argomento, che portava a contraddizioni o, almeno, a paradossi, e questo segnò il pensiero del grande stagirita. Fu proprio Aristotele a rivelare una duplice natura dell'infinito: "in atto" e "in potenza". "In atto" significa che si presenta in un colpo unico, tutto in una volta, come un dato di fatto; "in potenza" invece, vuol dire che si dà una situazione che in quell'istante in cui se ne parla è finita, ma con la sicurezza che si può sempre andare al di là del limite posto (che quindi non è un limite definitivo): *«Una cosa viene da un'altra senza fine, e ciascuna di esse è finita, ma ve ne sono sempre di nuove».*
In sintesi: *«[l'infinito attuale è] quello al di là del quale non c'è più nulla; … [l'infinito potenziale è] quello al di fuori del quale c'è sempre qualcosa»* (*Fisica*).[6]
Aristotele bandì ai matematici di far uso dell'infinito *attuale*, consentendo un uso esclusivo dell'infinito *potenziale*: *«Sicché l'infinito è in potenza, ma non in atto»*. Così per Aristotele un segmento non è composto di infinite parti (in atto) ma è divisibile infinite volte (in potenza).

[6] Molte sono le ricerche "aristoteliche" sugli usi potenziali ed attuali del termine infinito, a volte considerato come aggettivo ed a volte come sostantivo: Moreno e Waldegg, 1991; Tsamir e Tirosh, 1992.

> *«Comunque questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da non poter essere percorso in atto. In realtà, essi stessi, allo stato presente, non sentono il bisogno dell'infinito (e in realtà non se ne servono), ma soltanto di una quantità grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita (…) Sicché, ai fini delle loro dimostrazioni, a loro non importerà affatto la presenza dell'infinito nelle grandezze reali»* (Fisica, III, cap. 7, 207b 27).

Questo divieto fu percepito per lungo tempo come un vero e proprio dogma: più di uno studioso nel Medioevo e nel Rinascimento, ma anche in tempi a noi assai più vicini, si trovò ad un passo dal potere "dominare" l'infinito con i suoi paradossi, ma la pesante eredità dello stagirita rimarrà sempre presente.
Aristotele mise in evidenza anche la distinzione tra infinito per addizione e infinito per divisione (*Fisica*) che è spiegato in Zellini (1993) in questo modo: *«Se si considera un'unità di lunghezza e la si addiziona a se stessa infinite volte si ottiene certamente una distanza illimitata non percorribile in un tempo finito. Ma se ci si prefigura l'illimitato secondo un procedimento in qualche modo opposto, cioè dividendo per dicotomia l'unità di lunghezza in infiniti intervalli, ecco che l'infinità può considerarsi in qualche modo esauribile entro un intervallo limitato di tempo».*

Euclide (ˉ300). Nella sua sistemazione della matematica contenuta nell'opera immortale e celebratissima: *Elementi*, accetta la scelta di Aristotele. Ossia, per Euclide il problema dell'infinito è ben presente e fa di tutto per evitarlo.
- Nella definizione XIV del I libro stabilisce che le figure sono tutte al finito.
- Nel postulato II del I libro non usa il termine *retta*, ma parla di un ente geometrico che chiama: *eutheia grammé* (*linea terminata*) per il quale richiede tramite un postulato che si possa *«prolungare continuamente per diritto»*.
- Il V e più famoso postulato parla ancora di *eutheia grammé* e non di *retta*; in particolare richiede esplicitamente il prolungamento illimitato di due linee terminate e per questo verrà il più possibile "evitato" da Euclide nella trattazione successiva.
- Nella proposizione I del libro VII, applica il procedimento della discesa: *«Se si prendono due numeri disuguali e si procede a sottrazioni successive, togliendo di volta in volta il minore dal maggiore, la differenza dal minore e così via, se il numero che rimane non divide mai quello che immediatamente lo precede, finché rimanga soltanto l'unità, i numeri*

dati all'inizio saranno primi tra loro». Presi due numeri, questo procedimento termina sempre dopo una reiterazione finita di passi.

- Nella proposizione XX del IX libro non dimostra che «*Esistono infiniti numeri primi*», ma che «*I numeri primi sono di più che ogni proposto numero complessivo di numeri primi*», in sintonia con la posizione di Eudosso da Cnido (ˉ408-ˉ355)[7] di parlare di infinito senza mai nominarlo.
- Una delle più celebri nozioni comuni (*coinaì énnoiai*) scelte da Euclide è: «*Il tutto è maggiore della parte*» che contrasta l'intuizione avuta da Anassagora.
- Ma non sempre la presenza della problematica connessa con l'infinito si rivela per prolungamento o, come dice Aristotele, per accrescimento; in Euclide rientra anche l'infinitesimo con la dimostrazione del fatto che: l'*angolo di contingenza* è minore di qualsiasi *angolo rettilineo*; ciò nega il postulato posto da Eudosso da Cnido, chiamato oggi postulato di Eudosso-Archimede, per questo nel V libro degli Elementi, Euclide afferma: «*Due grandezze hanno rapporto tra loro quando ciascuna di esse, moltiplicata per un numero [naturale] opportuno, supera l'altra*», escludendo così, in un colpo solo, magistralmente, dall'insieme degli angoli rettilinei, i mistilinei (e il pericolo di dover parlare di "infinitesimi attuali") (D'Amore, 1985).

L'opera di Euclide, per quanto riguarda l'infinito, è quindi improntata su una scelta filosofico-aristotelica: egli rifiuta del tutto l'infinito attuale ed accetta e fa uso del solo infinito potenziale; in questa scelta è estremamente rigoroso e non si concede deroghe.

Archimede di Siracusa (ˉ287-ˉ212). Tratta il metodo di Esaustione, che si basa sulla divisione delle figure geometriche (piane o solide) in infinitesimi (attuali) e in infinite sezioni. Archimede affronta così con disinvoltura questioni assai delicate, dimostrandosi poco avvezzo alle remote filosofie, ma mettendo così in evidenza risultati assai arditi e significativi. A questo punto viene lecito chiedersi se Archimede fosse a conoscenza della problematica dell'infinito; di questo ne abbiamo la testimonianza nella sua opera *Arenario*. Proprio in questo testo, Archimede calcola quanti sono i granelli di sabbia contenuti in una sfera il cui raggio è dato dalla distanza della Terra dal Sole. La risposta è approssimabile con 10^{63} e per poterla dare Archimede si deve inventare un sistema numerico che vada al di là

[7] Eudosso da Cnido riesce ad elaborare una teoria delle proporzioni, mediante la quale si può operare anche sui rapporti senza aver bisogno dell'infinito in atto. Si deve poi sempre a Eudosso il metodo di esaustione, anch'esso volto ad eliminare l'infinito in atto. Entrambi questi metodi non eliminano completamente l'infinito, ma privilegiano l'infinito in senso potenziale.

delle *miriadi.*[8] Il numero più grande raggiunto da Archimede è *una miriade di miriadi di unità del miriardesimo ordine e del miriardesimo ciclo*, cioè $M^{(M^2)} = (10^8)^{(10^{16})}$, molto più grande dei "soli" 10^{63} granelli di sabbia che gli servivano. Questo dimostra la necessità di numeri sempre più grandi dei diecimila offerti dalla lingua greca antica, ma allo stesso tempo si nota la preoccupazione di non "esagerare" con il rischio di coinvolgere l'"infinito": risulta ancora molto presente il bisogno di porre un limite ben preciso.

Tito Lucrezio Caro (¯10-55). Ricordato per il *De Rerum Natura*: *«Supponi per un momento che lo spazio sia limitato e che qualcuno si porti all'estremo confine e lanci una freccia…»,* frase che racchiude l'idea di un Universo illimitato (L.I, 968-973).

Clemente Alessandrino (150 - 215). L'infinito viene visto come attributo divino. Esso viene applicato in senso positivo alla divinità ed in senso negativo alla nostra incapacità di cogliere la divinità nella sua ineffabilità.

Diofanto di Alessandria (250). Introduce le variabili numeriche con un simbolismo piuttosto raffinato tanto da essere molto studiato e lodato con stupore dal suo "allievo" Fermat nel XVII secolo. Nell'uso algebrico delle variabili numeriche è celato il concetto di infinito.

S. Basilio Magno (330-379). L'infinito diviene sinonimo di pienezza della divina perfezione. Da questo punto in poi l'infinito viene sempre citato in connessione con gli attributi divini e i filosofi si preoccupano di dimostrare per vie diverse tale qualità dell'Essere Supremo.

Agostino di Tagaste (345-430). Nella sua opera *De Civitate Dei* ammette l'infinità attuale dei numeri naturali: *«Dio conosce tutti i numeri in modo attuale. L'infinito attuale è in mente Dei».*[9]

Proclo (410-485). L'infinito assume ancora un connotato potenziale laddove si espande per gradi a partire dagli intelligibili, in altri punti invece Proclo sembra propendere per l'infinito

---

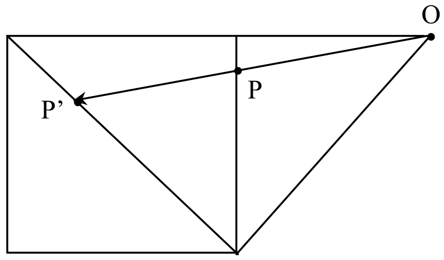
[8] Come riferisce Rucker (1991): *«I Greci non avevano la notazione di esponenziazione, ma solo di moltiplicazione, inoltre il numero massimo per cui avevano un nome era la miriade, pari a 10.000 ossia a 10^4».*

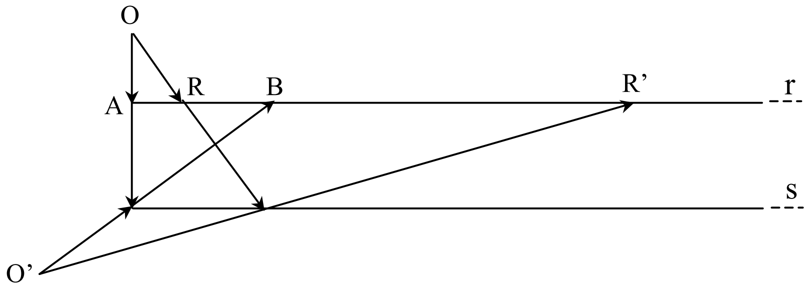
[9] Nella seconda metà del XIX secolo Cantor citerà Agostino tra i suoi ispiratori per dare fondamento alla teoria degli insiemi.

attuale soprattutto quando riconduce finito ed infinito all'Uno: *«Tutto ciò che esiste in qualche modo consta di finito e di infinito, per effetto del primo essere… [poiché] è chiaro che l'essere primo comunica a tutte le cose il limite assieme all'infinità, essendo esso stesso composto di questi»* (*Elementa teologica*).

Assume importanza la distinzione tra infinito filosofico e infinito matematico.

Ruggero Bacone (1214-1292). Nell'opera *Opus Maius* (1233) scrive che si può stabilire una corrispondenza biunivoca (come diciamo noi oggi) tra i punti di un lato di un quadrato ed i punti di una diagonale dello stesso, nonostante abbiano diversa lunghezza (idea ripresa successivamente da Galileo). E che una simile corrispondenza biunivoca si può avere (per traslazione o per proiezione doppia) tra due semirette (una di origine A ed una di origine B), situate sulla stessa retta *r*.





Ne conclude che l'infinito matematico in atto non è logicamente possibile: il tutto sarebbe non maggiore della parte, ma questo risulterebbe anti-Euclide, cioè anti-Aristotele, il che a qui tempi era ancora sentito come vietato.

Tommaso d'Aquino (1225-1274). In *Summa Theologiae* abbiamo la conferma dell'idea dell'infinito attuale in *mente Dei*. In questo testo, Tommaso ammette la possibilità di diversi livelli d'infinità nell'infinito, mentre in altri punti afferma che l'unico infinito attuale è Dio. Per le cose invece, egli riserva l'infinito in potenza e di conseguenza attribuisce all'infinito matematico solo l'aspetto potenziale: *«… resta provato chiaramente che Dio è infinito e perfetto… Quindi, come Dio, nonostante abbia una potenza infinita, tuttavia non può creare* *qualcosa di increato (il che sarebbe far coesistere cose contraddittorie), così non può creare cosa alcuna che sia assolutamente infinita».*

Guglielmo di Ockam (1290-1350). Scrive in *Questiones in quator libros sententiarum*: *«Non è incompatibile che la parte sia uguale o non minore del suo tutto; ciò accade ogni qualvolta una parte del tutto è Infinita. Ciò accade anche nella quantità discreta o in una qualunque molteplicità, una parte della quale abbia unità non minori di quelle contenute nel tutto. Così in tutto l'Universo non ci sono punti in numero maggiore che in una fava, perché in una fava ci sono infinite parti. Sicché il principio che il tutto è maggiore della parte vale soltanto per tutti i composti di parti integranti finite»*. Guglielmo è accusato di eresia nel 1324 e viene trattenuto in interrogatorio ad Avignone per 4 anni, poi fugge e si rifugia dapprima a Pisa e poi a Monaco di Baviera; risulta ancora assai pericoloso contrastare il pensiero di Aristotele.

Nicola d'Oresme (1323-1382). Intuì le coordinate che oggi sono dette cartesiane. Stabilisce quanto vale la seguente "somma" *s* coinvolgendo un uso dell'infinito assolutamente moderno:

$$s = \underbrace{1+\frac{1}{2}}_{>1}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>1/2}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>1/2}}_{>1}+\underbrace{\dots}_{\dots}$$

Dato un qualsiasi numero naturale M (comunque grande), dopo un certo numero di addendi, s>M; dunque: s supera qualsiasi numero naturale per quanto grande.

Nicolò da Cues (1400 o 1401-1464). Considera la matematica come un ideale di perfezione, per questo ritiene necessario un cosmo ordinato secondo "peso, numero e misura". I suoi riferimenti all'infinito sono sempre a carattere matematico e riguardano l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo. Nicolò da Cues rappresenta l'ultimo dei medioevali di chiaro stampo neo-platonico; l'infinito è poco presente come cardinale, ma appare come ordinale o come non meglio precisata "vastità". Com'è nello spirito medievale, Nicolò confonde l'infinito con l'illimitato oppure talvolta con l'indefinito (questa confusione sarà presente fino al XIX secolo e non solo, si vedano le affermazioni degli insegnanti nel paragrafo 3.7.1).

Nella sua opera maggiore, *Dotta ignoranza*, si trova una delle analogie più famose e amate dall'Autore: *«L'intelletto sta alla verità come il poligono ad n lati sta al cerchio. Quando n* *tende all’infinito, il poligono tende al cerchio; così, la verità è limite dell’intelletto all’infinito*» (Cap. III, L.I). Sempre in quest’opera, appare un paradosso relativo all’infinito attuale simile a quelli trattati da Galilei e da Bolzano: *«Se una linea è costituita da un numero N infinito di segmenti lunghi un piede, ed un’altra linea è costituita da un numero M infinito di segmenti lunghi due piedi, le due linee sono lunghe nello stesso modo infinito; se ne può concludere che “nella linea infinita un piede non è più piccolo di due piedi”»* (L.I, Cap. XVI). Ancora, nell’opera *Le congetture*, si trova un’argomentazione di carattere zenoniano, mal condotta, tesa a dimostrare che due linee qualsiasi hanno lo stesso numero di punti (L.I, Cap. IV). Come abbiamo rilevato, questa questione era già stata discussa da millenni, ad esempio da Anassagora e da Ruggero Bacone e sarà risolta soltanto alla fine del XIX secolo grazie all’opera di Cantor. Circa poi l’idea di maggiore, Nicolò afferma: «*non si conosce nessun numero infinito e nessun massimo dato*» (*Le congetture*, L.I, cap. XI).

Pare di poter concludere che una vera e propria coscienza dell’infinito sia ancora da svilupparsi; solo nel Rinascimento, grazie alla ricerca degli Artisti sulla prospettiva ed alle acute riflessioni di Galilei, doveva accadere il miracolo: Bonaventura Cavalieri ed Evangelista Torricelli riuscirono a “vedere” con acutezza quel che i Medievali stentavano a “vedere”.

1.1.2 L’infinito nel Rinascimento

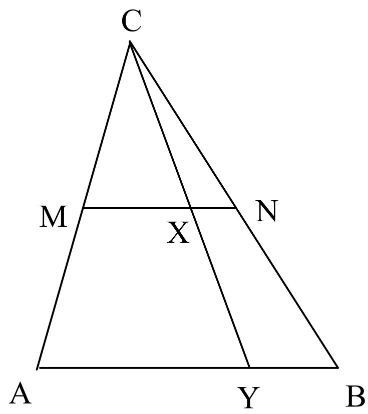
Nel Rinascimento l’infinito è estremamente presente, ma non nell’“Universo numerico”, bensì nel mondo della geometria e dell’arte (che a quell’epoca coincidevano): **Piero della Francesca (1406-1492)** che regala al mondo il *De Prospectiva Pingendi*, opera matematico-pittorica di pregio inestimabile; **Girolamo Cardano (1501-1576)** che scrive il trattato *De Subtilitate* (1582) sulla sottigliezza, cioè su qualche cosa che potremmo anche chiamare “grandezze infinitesime”, dove parla, in particolare, dell’angolo di contingenza.

Sempre nel Rinascimento risorge con piena consapevolezza il “metodo degli indivisibili” che fu già di Archimede; ci lavorano: **Leonardo da Vinci (1452-1519)**, **Luca Valerio (1552-1618)**, **Galileo Galilei (1564-1642), Paul Guldin (1577-1643)**, **Bonaventura Cavalieri (1598-1647)**, **Evangelista Torricelli (1608-1647)**.

Galileo Galilei (1564-1642). Riprende l’impostazione di Democrito, estesa però dalla geometria a classi più ampie di problemi analitici. L’ultima opera: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1958) del 1638, comprende la maggior parte delle considerazioni del pisano sui paradossi dell’infinito.

L'infinito attuale è presente in diverse occasioni. Secondo Galileo le linee, ma anche gli oggetti concreti che si trovano in natura sono formati da un continuo (infinito attuale) di parti piccole a piacere ma misurabili (e quindi a loro volta divisibili). *«Ogni parte (se parte si può chiamare) dell'infinito è infinita; sì che se bene una linea di cento palmi è maggiore d'una di un palmo solo, non però i punti di quella sono più dei punti di questa, ma e questi e quelli sono infiniti».*

Le considerazioni di geometria lo portano così a cogliere che l'infinito può entrare in collisione con la VIII nozione comune di Euclide: «*Il tutto è maggiore della parte*». Basta disegnare un triangolo e vedere che tra il lato AB ed il segmento MN, che congiunge i punti medi degli altri due lati, deve esistere una corrispondenza biunivoca ottenuta congiungendo i punti di AB con C. Tutto ciò contro l'intuizione che porta a far credere che AB, dato che ha lunghezza doppia rispetto a MN, sia formato da un numero maggiore di punti.



> *«Queste sono di quelle difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed equalità non convenghino a gl'infiniti, dei quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro»* (Galilei, 1958, pag. 43).

In àmbito non geometrico, siano:

0 1 2 3 4 … la successione dei numeri naturali (N)

0 1 4 9 16 … la successione dei quadrati perfetti (Q_N)

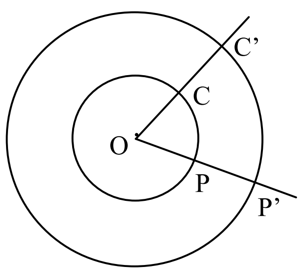
Q_N è strettamente contenuta in N, ciò porta a dire, seguendo il pensiero di Euclide, che N contiene più elementi di Q_N, ma per ogni numero naturale c'è un ben determinato suo quadrato, cioè c'è un ben determinato elemento di Q_N (e viceversa). Da questo si deduce, con ovvia intuizione, che ci sono tanti elementi in N quanti in Q_N (*paradosso di Galilei*).[10] Questa trattazione era presente anche nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi*, laddove si accennava alle leggi di caduta dei gravi.

> *«Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti esser tutti i numeri [naturali], infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri [naturali], né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di uguale, maggiore e minore non aver luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate»* (Galilei, 1958, pag. 45).

In Galileo si prefigura la definizione di insieme infinito, quale sarà presentata in seguito da Dedekind.

Siamo di nuovo ad un punto delicato della storia dell'infinito: tutto il meccanismo creato da Aristotele per salvaguardare almeno uno dei possibili usi dell'infinito da parte dei matematici è stato demolito, ma i tempi non sono ancora maturi e occorrerà aspettare ancora qualche secolo prima che vi sia piena consapevolezza da parte dei matematici di poter "dominare" con mezzi tecnici, neppur troppo sofisticati, l'infinito.

Evangelista Torricelli (1608-1647). Allievo di Galileo, spinto dal maestro ad entrare in contatto con la Geometria degli Indivisibili di Cavalieri, arrivò a concezioni ardite circa l'infinito e gli infinitesimi (che trattò esplicitamente in senso attuale) giungendo perfino ad intuire i punti impropri delle iperboli e a pensare all'area finita non più legata, come sembrava necessario e invece non è, a figure limitate. Torricelli riconosce inoltre che due circonferenze concentriche (di lunghezze diverse) sono formate dallo stesso numero di punti, basta prendere il centro comune, come origine di una proiezione.



[10] Molte ricerche in campo didattico vertono sulle considerazioni di Galileo: Duval, 1983; Tsamir e Tirosh, 1994; Waldegg, 1993.

René Descartes (1596-1650) e **Pierre de Fermat (1601-1665).** Tutti e due hanno a che fare con gli “infinitesimi” per risolvere il problema della determinazione delle tangenti ad una curva.

Importante è il fatto che Descartes riuscì a vedere con occhi nuovi la geometria: tutti gli enti geometrici e le loro proprietà vennero espressi in linguaggio algebrico. Affrontò anche il discorso sull’infinito, ma…: *«… mai ci affaticheremo in discussioni intorno all’infinito. Infatti, dato che siamo finiti, sarebbe assurdo che noi stabilissimo alcunché su tale argomento e tentassimo in tal modo di renderlo finito ed impadronircene…»*. Con Descartes compare una distinzione tra *infinito*, attributo proprio di Dio, e *indefinito*, usato per indicare grandezze illimitate in quantità o in possibilità.

Fermat, invece a quanto risulta, non accenna neppure in un’occasione all’argomento.

Eppure lo sviluppo della geometria analitica ebbe molta influenza sulla problematica dell’infinito dato che obbligò ad equiparare l’infinità dei numeri con l’infinità degli enti geometrici, contribuendo enormemente al passaggio dalla preistoria alla storia di questo argomento, soprattutto per due motivi:

1. finalmente può nascere l’Analisi Matematica (e quindi trovare una sistemazione razionale l’infinito);
2. finalmente troveranno risposta le domande: Quanti sono i punti di un quadrato e di un suo lato?, Quante sono le rette del piano? …

Su quest’ultimo punto per secoli i matematici hanno fatto confusione; i fraintendimenti saranno definitivamente chiariti solo grazie a Cantor e a Dedekind.

Blaise Pascal (1623-1662). Sembra propendere per l’infinito in atto: *«L’unità aggiunta all’infinito non l’accresce di niente… Il finito si annienta di fronte all’infinito e diventa un puro niente… Noi sappiamo che c’è un infinito e ne ignoriamo la natura. Poiché sappiamo che è falso che i numeri sono finiti, è vero dunque che c’è un infinito del numero… Noi dunque conosciamo l’esistenza e la natura del finito perché siamo finiti ed estesi come lui. Conosciamo l’esistenza dell’infinito e ignoriamo la sua natura, perché ha estensione come noi ma non ha confini come noi. Ma non conosciamo né l’esistenza né la natura di Dio, perché non ha estensione né confini. Però mediante la fede conosciamo la sua esistenza…»* (*Infinito. Niente*).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Propone tre specie di infinito: *infimo*, nella quantità; *medio*, come totalità di spazio e tempo; *massimo*, che rappresenta Dio soltanto, come fusione di ogni cosa in uno. Come riferisce Kuyk (1982): *«In Leibniz, ogni monade aveva un'infinità attuale di percezioni e ogni corpo era un'infinità attuale di monadi».* Inoltre, Leibniz tratta gli infinitesimi con una certa naturalezza, raggiunta grazie agli sforzi dei matematici medioevali e rinascimentali, ma in lui si riscontra una sorta di preoccupazione e diffidenza nei confronti di queste grandezze, manifestata in una lettera a Fouchet: *«Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur».*

Con **Isaac Newton (1642-1727)** nasce finalmente in modo esplicito l'Analisi Matematica, e viene diffusa e resa grande grazie agli sforzi di diversi matematici, tra i quali **Carl Friederich Gauss (1777-1855)** il quale però ancora asserisce: *«… protesto contro l'uso di una grandezza infinita come un tutto compiuto, ciò che in matematica non è mai stato…».* L'infinito è presente, ma non viene esplicitamente sviscerato.
La preistoria di questo argomento è dura a morire e come vedremo nei capitoli 3 e 4 vive ancora nel profondo della maggioranza delle persone.

Immanuel Kant (1724-1804). Fu uno dei primi a "debellare" il pericolo derivante dal modo spregiudicato in cui i pensatori del diciassettesimo e diciottesimo secolo avevano affrontato le nozioni di infinità (attuale) e infinitesimo (attuale). Kant scoprì la presenza di antinomie nel senso *costitutivo*[11] di infinito (si veda la prima e seconda antinomia della ragion pura), che si riducevano alla seguente: quando il mondo, o qualsiasi cosa in esso contenuta, è considerato finito, la mente è capace di pensarne un'estensione; quando il mondo, o qualsiasi cosa in esso contenuta, è considerato attualmente infinito, la mente non può pensarlo affatto. In entrambi i casi, la mente è incoerente con il mondo: il finito è troppo piccolo per la ragione e l'infinito (attuale) è troppo grande (Kant, 1967). Come riferisce Kuyk (1982): *«La soluzione proposta da Kant consisteva nel considerare l'infinito non in senso costitutivo, ma in senso regolativo. (…) Con questo spostamento di significato, la nozione di infinito passa dall'ontologia all'epistemologia».*

La polemica tra infinito attuale e potenziale continua ancora. Nel concorso bandito dall'Accademia di Berlino [sotto la presidenza di Lagrange (1736 - 1813)] per un lavoro che

[11] Per Newton e per Leibniz, l'infinito aveva un significato *costitutivo*.

chiarisse il concetto di infinito in matematica, il vincitore **S. L'Huilier (1750-1840)** propone un ritorno all'infinito classico, aristotelico, contro l'accettazione dell'infinito in atto che trovava il suo propugnatore in Leibniz.

1.2 Dalla preistoria alla storia del concetto di infinito matematico

L'infinito in atto ricompare ed acquista un ruolo estremamente importante a partire dalla seconda metà del XIX secolo ed attualmente invade tutta, o quasi, la matematica dei nostri giorni.

1.2.1 Bernard Bolzano (1781-1848)

Tra il 1842 e il 1848 scrive *I Paradossi dell'Infinito* che escono a stampa postumi nel 1851 (Bolzano, 1965). Si tratta di una raccolta di 70 brevi paragrafi dei quali ne riportiamo il contenuto di alcuni:

§13: L'insieme delle proposizioni e "verità in sé", è infinito.

Wissenschaftslehre (proposizione in sé): *«Per W. io intendo un qualunque enunciato asserente che qualche cosa è o non è; senza tener conto se questo enunciato sia vero o falso, se esso sia stato espresso o non espresso a parole da qualcuno».* Se una W. è vera, si chiama Wahrheit an sich (verità in sé).

Sia A_0 una Wahrheit an sich; sia A_1 la nuova W. an sich: «A_0 è vera»; sia A_2 la nuova W. an sich: «A_1 è vera»; …

Sia $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$. $\mathcal{A}$ è "più grande" di ogni insieme finito ed è dunque infinito.

Inoltre si possono mettere in corrispondenza biunivoca gli elementi di $\mathcal{A}$ con quelli dell'insieme dei numeri naturali N (basta porre la corrispondenza tra A_i ed i).

(Notiamo che l'insieme infinito $\mathcal{A}$ è costruito nella lingua o, meglio, sui vari livelli metalinguistici).

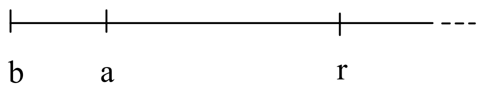
§20: Una notevole relazione tra due insiemi infiniti, consiste nella possibilità di accoppiare ciascun oggetto appartenente a un insieme con un oggetto appartenente all'altro, con il risultato che nessuno degli oggetti di entrambi gli insiemi rimanga senza corrispondente, e neppure compaia in due o più coppie (mette così in evidenza la corrispondenza biunivoca tra due insiemi infiniti).

§21: Nonostante la loro equinumerosità in membri, due insiemi infiniti possono tuttavia stare in una relazione di disuguaglianza per quel che riguarda le loro moltitudini, così che l'uno possa risultare una parte propria dell'altro. (Con abuso di linguaggio moderno: un insieme è infinito se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Tutto questo, prima di Dedekind; ma questa non è una definizione e, forse, non c'è neanche piena consapevolezza).

Eppure non si possono solo elogiare i risultati di Bolzano, nella sua opera sono annidati errori ed incertezze che hanno fatto storia. Eccone alcuni esempi:

§18: Se A è un insieme e se ne tolgono alcuni elementi, A contiene meno elementi di prima.

§19: Ci sono insiemi infiniti che sono più grandi o più piccoli di altri insiemi infiniti. La semiretta br è maggiore della semiretta ar, da cui si deduce che esistono infiniti di grandezza diversa



§29: C'è una certa confusione tra la cardinalità dell'insieme {1, 2, 3, …, n, …} e il valore 1 + 2 + 3 + … + n + …

§32: Guido Grandi (1671 - 1742) aveva posto il problema di calcolare la "somma" di infiniti addendi: s = a – a + a – a + a – a + … ed aveva avuto varie risposte:

s = (a – a) + (a – a) + (a – a) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0

s = a – [(a – a) + (a – a) + (a – a) + ...] = a – [0 + 0 + 0 + …]= a – 0 = a[12]

s = a – (a – a + a – a + a – a + …) = a – s = ⇒ 2s = a ⇒ s = a/2 (questa soluzione proposta ancora dallo stesso Grandi,[13] piaceva molto anche a Leibniz, tanto che la difese).

La questione era ancora dibattuta ai tempi di Bolzano, tant'è che in questo paradosso, lui stesso scrive che nel 1830, uno scrittore che si firmava M.R.S., tentò di dimostrare la terza soluzione tra le precedenti sugli *Annales de Mathématique de Gergonne*, 20, 12; soluzione contro la quale si scaglia Bolzano con le seguenti parole: *«La serie racchiusa tra parentesi non ha evidentemente più lo stesso insieme di termini che aveva quella*

---

[12] Nel 1703, lo stesso Grandi scrive: *«Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione 1 – 1 + 1 – 1 + 1 … io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione ex nihilo è perfettamente plausibile».*

[13] Scrive D.J. Struik (1948): *«Egli* (Grandi) *otteneva il valore ½ sulla base dell'aneddoto del padre che lascia in eredità ai propri due figli una pietra preziosa, che ciascuno alternativamente deve conservare presso di sé per un anno. Così la pietra finisce per appartenere per metà a ciascuno dei figli».*

originariamente posta uguale a x (in questo caso è s) *bensì ad essa manca il primo termine a*».

§ 33: Precauzioni che devono essere osservate nel calcolo con l'infinito per non incorrere in "errori":

Sia S_1 la successione dei numeri 1, 2, 3, …

Sia S_2 la successione dei loro quadrati 1^2, 2^2, 3^2, …

Ora: poiché tutti i termini di S_2 appaiono anche in S_1 e ci sono termini di S_1 che non appaiono in S_2, ciò parrebbe comportare che la somma dei termini di S_1 è maggiore della somma dei termini di S_2, invece la somma dei termini di S_2 è maggiore di quella dei termini di S_1, dato che S_1 ed S_2 si possono mettere in corrispondenza biunivoca e ciascun termine di S_2 è maggiore (con l'eccezione del primo termine) del suo corrispondente di S_1.

§ 40: Paradossi nel concetto di spazio: due segmenti di lunghezze diverse sono formati da un diverso numero di punti.

§ 48: Un volume contiene più punti della sua superficie laterale e questa più punti della curva che la racchiude.

Secondo ciò che afferma Cantor (1932, pag. 180), i problemi di Bolzano sono dovuti al fatto che manca ancora l'idea di cardinale di un insieme.[14] Vi è ancora molta strada da percorrere: la storia è appena cominciata.

Non possiamo non citare **Karl Weierstrass (1815-1897)**, considerato da molti colui che sistema l'Analisi Matematica da un punto di vista rigoroso. Lo ricordiamo in quanto studia con estrema serietà e consapevolezza l'infinito matematico. Alcuni leggono l'opera di sistemazione dell'Analisi partita da Cauchy (1789-1857) con la moderna definizione di limite e di funzione continua (la cosiddetta ε-δ definizione di Weierstrass), come un definitivo abbandono dell'infinito in atto nella matematica in favore dell'infinito potenziale (Marchini, 2001). Altri sostengono che l'opera di Weierstrass contribuì, anche dal punto di vista formale, all'evoluzione dell'infinitesimo potenziale verso l'infinitesimo attuale (Arrigo e D'Amore,

[14] Dal punto di vista didattico, numerose ricerche si sono indirizzate in questi anni ad analizzare le analogie tra le risposte "ingenue" degli studenti ed alcune affermazioni di Bolzano, come ad esempio il lavoro di Moreno e Waldegg del 1991.

1993; D’Amore, 1996; Bagni, 2001), evoluzione che proseguirà idealmente, nel XX secolo, con l’analisi non-standard (Robinson, 1974).[15]

1.2.2 Richard Dedekind (1831–1916)

Nel suo scritto *Continuità e numeri irrazionali* del 1872, il §4 ha un titolo affascinante e significativo: *Creazione dei numeri irrazionali*. Creazione, infatti, con il suo celebre metodo dei “tagli” o “sezioni”, egli crea, a partire da Q, l’insieme R, aggiungendo appunto a Q i numeri irrazionali.[16]

I numeri reali sono le classi di sezioni definite in Q. (Q, <) è denso ma non continuo (dimostrazione dovuta sostanzialmente ai Pitagorici); (R, <) è denso e continuo[17] (Bottazzini, 1981).

Assai interessanti sono i rapporti epistolari di Dedekind con Cantor che saranno messi in evidenza nel paragrafo 1.2.4; qui ricordiamo che in quel periodo si sviluppava la necessità di definire il continuo e che proprio questi due matematici tedeschi fornirono forse i due più famosi assiomi di continuità (Bottazzini, 1981; Kuyk, 1982).

Come riferisce Rucker (1991), nel 1887 Dedekind pubblicò in uno dei suoi scritti più famosi: *Che cosa sono e a che cosa servono i numeri,* una dimostrazione dell’infinità del *Mondo dei pensieri* che egli chiamava *Gedankenwelt*. La dimostrazione è la seguente:

se *s* un pensiero: “*s* è un pensiero” è un pensiero;

““*s* è un pensiero” è un pensiero” è un pensiero;

“““*s* è un pensiero” è un pensiero” è un pensiero” è un pensiero;

…

Ecco che cosa dirà Cantor su questa “dimostrazione” in una sua lettera del 1905:

> *«Una molteplicità* [insieme] *può essere tale che l’assunzione che tutti i suoi elementi “siano insieme” conduce a contraddizione, in modo tale che sia impossibile concepire la molteplicità come un’unità, come una “cosa finita”.*

[15] Negli anni ’60 del XX secolo, Abraham Robinson (1918 - 1974) basandosi su importanti teoremi di Logica Matematica ed idee di Skolem (1887 - 1963) riesce a dare una teoria coerente in cui trattare infinitesimi ed infiniti attuali mediante l’analisi non-standard.

[16] Tra le ricerche che rivelano la grande difficoltà dell’idea di numero irrazionale ricordiamo: Fischbein, Jehiam e Cohen, 1994, 1995.

[17] Sulla difficoltà del concetto di densità nella scuola primaria si veda: Gimenez, 1990. Mentre a proposito del continuo presso studenti di 16-17 anni, si veda: Romero i Chesa e Azcarate Gimenez, 1994.

Chiamo queste molteplicità assolutamente infinite o molteplicità incoerenti. Come si può facilmente vedere, la "totalità delle cose pensabili", per esempio, è una molteplicità di questo tipo…».

(La ragione che porta ad escludere che l'insieme di tutti i pensieri sia un pensiero è che altrimenti tale insieme sarebbe elemento di sé stesso).

Risale a Dedekind la definizione di insieme infinito già intravista da Galileo: *"Un insieme è infinito quando si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria"*.

1.2.3 Georg Cantor (1845-1918)

Giovane matematico brillante, segue l'ortodossia della ricerca studiando problemi di matematica ben visti dalla nobiltà baronale accademica: il problema dell'unicità della scomposizione di una funzione reale in una serie trigonometrica. Ciò lo porta, e siamo nel 1872 (Cantor ha già 27 anni), a studiare un insieme infinito di punti giacenti su un intervallo ma non coincidente con l'intervallo stesso; così analizza come sono disposti i punti di una retta; le reciproche posizioni tra segmenti distinti; segmenti e rette… tutto ciò in modo attuale, senza più alcun imbarazzo di tipo filosofico.

Inizia così l'avventura di Cantor: dimentica la seriosa matematica accademica ed indaga l'infinito in sé.

Di seguito riportiamo alcuni brani tratti da *Gesammelte Abhandlungen* (1932, da pag. 374 a 404):

«L'infinito potenziale ha solo una realtà presa a prestito dato che un concetto di infinito potenziale rimanda sempre ad un concetto di infinito attuale che lo precede logicamente e ne garantisce l'esistenza.

L'infinito attuale si presenta in tre contesti: il primo è quello in cui si presenta nella forma più completa, in un essere completamente indipendente trascendente questo mondo, in Deo, ed è questo che io chiamo l'Infinito Assoluto; il secondo è quando si presenta nel mondo contingente, nel creato; il terzo è quando la mente lo afferra in abstracto, come grandezza matematica, numero o tipo d'ordine.

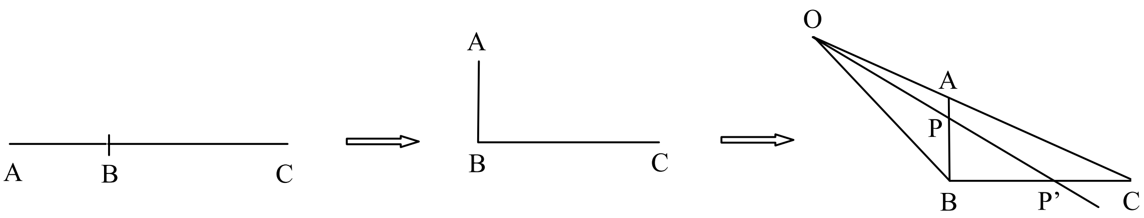
Voglio sottolineare chiaramente la differenza tra l'Assoluto e quello che io chiamo il Transfinito, cioè l'infinito attuale degli ultimi due tipi, poiché si tratta di oggetti evidentemente limitati, suscettibili di accrescimento, e quindi collegati al finito».

«La paura dell'infinito è una forma di miopia che distrugge la possibilità di vedere l'infinito attuale, anche se questo nella sua forma più alta ci ha creati e ci mantiene, e nelle sue forme secondarie di transfinito è presente intorno a noi e popola persino le nostre menti».

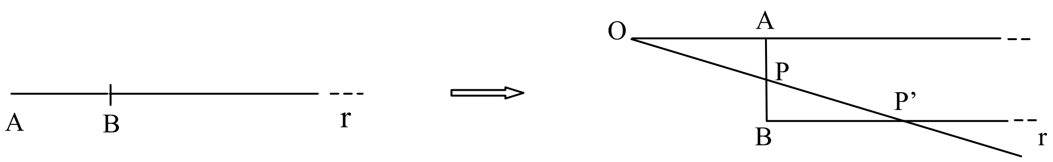
«È così diventata inevitabile l'esigenza di costruire il concetto di numero infinito attuale attraverso un'astrazione naturale opportuna, allo stesso modo che il concetto di numero naturale risulta dagli insiemi finiti con processo di astrazione».

Riportiamo alcuni risultati di Cantor espressi in termini moderni.

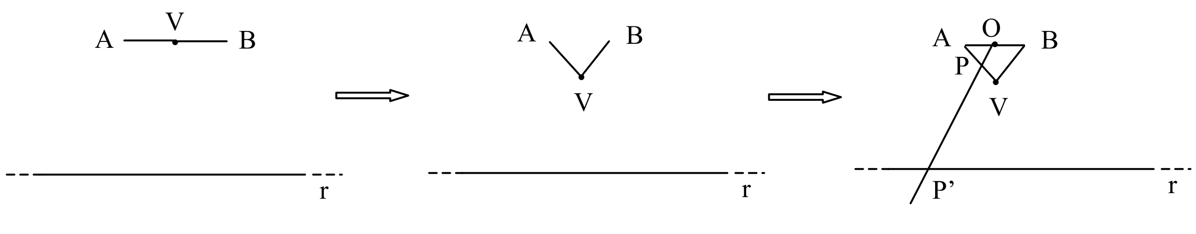
- Due insiemi si dicono equipotenti o equinumerosi se esiste tra di essi una corrispondenza biunivoca (si deve notare come non sussista nessuna distinzione tra insiemi finiti e infiniti).
- I segmenti AB e AC (pensati come insiemi di punti) sono equipotenti al di là della loro lunghezza, che non incide (qui e nel seguito le figure sostituiscono le dimostrazioni):



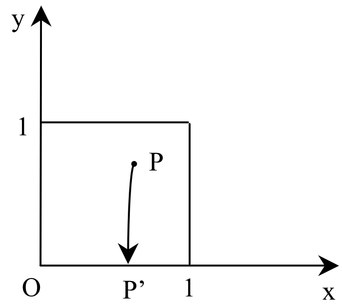
- L'insieme dei punti di un segmento è equinumeroso all'insieme dei punti di una semiretta:



- L'insieme dei punti di un segmento è equinumeroso all'insieme dei punti di una retta:



- L’insieme dei punti di un quadrato è equinumeroso all’insieme dei punti di un suo lato.
Prendiamo il quadrato unitario inserito in un sistema di coordinate cartesiane e quindi avente il lato in coordinate ascisse:



Nel dualismo di rappresentazione possibile dello stesso numero, per esempio: 0,40000000… 0,399999999…, scegliamo una delle due ed eliminiamo l’altra (per esempio scartiamo il caso del periodo 9).
Ogni punto interno al quadrato ha coordinate del tipo:
P $(0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots; 0,b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots)$;
ad esso facciamo corrispondere sul lato (in coordinate ascisse) il punto ben preciso:
P $(0,a_1b_1a_2b_2\ldots a_n b_n\ldots)$
e viceversa.
Si è così individuata la corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato e quelli di un suo lato.[18]
(All’inizio Cantor riteneva che la cardinalità **c** della retta fosse $\aleph_1$, la cardinalità del piano $\aleph_2$, dello spazio $\aleph_3$ e così via; invece con questa dimostrazione rivela che le cardinalità di tutti questi insiemi continui di punti, sono sempre uguali a **c**).

1.2.4 Corrispondenza Cantor-Dedekind

Brano di una lettera di Cantor a Dedekind del 2 dicembre 1873:

> *«A proposito delle questioni che mi hanno occupato in questi ultimi tempi, mi accorgo che, in questo ordine di idee, si presenta anche la seguente:*
> *una superficie (per esempio un quadrato compreso il suo contorno) può essere messa in relazione univoca* [noi oggi diremmo: in corrispondenza biunivoca] *con una curva (per esempio un segmento di retta, estremi compresi) in modo che ad*

[18] Sulle difficoltà che incontrano gli studenti liceali ad accettare questa dimostrazione si basa la ricerca di Arrigo e D’Amore del 1999.

ogni punto della superficie corrisponda un punto della curva, e reciprocamente ad ogni punto della curva un punto della superficie?

Mi sembra, in questo momento, che rispondere alla domanda presenti grosse difficoltà, sebbene, anche qui, si sta talmente inclini a dare una risposta negativa che quasi si considera superflua una dimostrazione».

Brano di una lettera di Dedekind a Cantor del 18 maggio 1874:

«… a Berlino, un mio amico, al quale ho esposto la stessa difficoltà, mi ha dichiarato che la cosa era per così dire assurda, perché si capisce benissimo che due variabili indipendenti non possono essere ricondotte ad una sola».

Brano di una lettera di Cantor a Dedekind del 20 giugno 1877:

«*Vorrei sapere se voi considerate aritmeticamente rigoroso un metodo di dimostrazione da me applicato. Si tratta di dimostrare che le superfici, i volumi ed anche le varietà continue a p dimensioni possono essere messi in corrispondenza univoca con curve continue, dunque con varietà a una sola dimensione, che le superfici, i volumi, le varietà a p dimensioni hanno dunque la stessa potenza delle curve; questa opinione appare opposta a quella generalmente diffusa, particolarmente tra i rappresentanti della nuova geometria, secondo la quale si parla di varietà semplicemente, doppiamente, triplamente, … p volte infinite; ci si presenta a volte addirittura le cose come se si ottenesse l'infinità dei punti di una superficie elevando in qualche modo al quadrato, quella di un cubo elevando al cubo, l'infinità di punti di una linea (…). Voglio parlare dell'ipotesi secondo la quale una molteplicità continua p volte estesa necessita, per la determinazione dei suoi elementi, p coordinate reali fra loro indipendenti, questo numero non potendo essere, per una stessa molteplicità, né aumentato né diminuito. Anch'io ero arrivato a credere a questa ipotesi, ero quasi persuaso della sua esattezza; il mio punto di vista differiva da tutti gli altri soltanto nel fatto che consideravo questa ipotesi come un teorema che necessitava, ad alto livello, una dimostrazione, e avevo precisato il mio punto di vista sotto forma di domanda sottomessa ad alcuni colleghi, in particolare anche all'occasione del giubileo di Gauss a Göttingen*».

«Una varietà continua a p dimensioni, con p > 1, può essere messa in relazione univoca con una varietà continua ad una dimensione, in modo tale che a un punto dell'una corrisponda un punto ed uno solo dell'altra?
La maggior parte di quelli ai quali ho posto la domanda si sono molto stupiti solo per il fatto che io la ponessi, perché consideravano ovvio che, per la determinazione di un punto in un'estensione a p dimensioni, bisognava usare p coordinate indipendenti. Chi malgrado tutto penetrava il senso della domanda, doveva riconoscere che bisognava almeno dimostrare perché la risposta era "ovviamente" no. Come detto, io facevo parte di quelli che ritenevano verosimile la risposta negativa – fino al momento recentissimo nel quale, grazie a una successione abbastanza complessa di pensieri, sono giunto alla convinzione che la risposta è affermativa, senza alcuna restrizione. Poco dopo ho trovato la dimostrazione che avete sotto gli occhi».

(E Cantor presenta a Dedekind la dimostrazione vista sopra dei punti del quadrato e del suo lato).

La lettera parte il 20 giugno 1877, ma l'impazienza di Cantor è talmente elevata che torna a scrivere lui stesso a Dedekind, sollecitando una risposta, il 25 giugno 1877:

«Fin tanto che voi non mi approvate, non posso che dire: lo vedo ma non lo credo».

Dedekind risponde subito il 29 giugno 1877:

«Ho esaminato ancora una volta la vostra dimostrazione e non vi ho trovato lacune; sono convinto che il vostro interessante teorema è esatto e mi felicito con voi».

La strada è definitivamente aperta verso l'infinito (in questo capitolo seguiremo solo quello numerico).

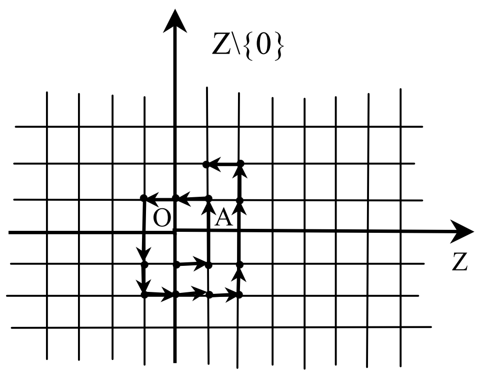
1.2.5 Cardinalità

Consideriamo l'insieme N dei numeri naturali e sia **n** la sua cardinalità o numerosità o potenza che diremo "del numerabile"; **n** è una cardinalità infinita nel senso che è maggiore di qualsiasi cardinalità finita data.

Siano N_Q l'insieme (di Galilei) dei quadrati perfetti, N_P dei numeri pari, N_D dei dispari, N_{Pr} dei primi, … Ciascuno di questi insiemi si può mettere in corrispondenza biunivoca con N ed ha quindi la cardinalità del numerabile **n**.
Se A è un sottoinsieme di N, infinito, allora la cardinalità di A è **n**.
Infatti, in base alle ipotesi, A = $\{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots\}$ dove gli a_i sono elementi di N. Consideriamo la corrispondenza biunivoca $a_1 \leftrightarrow 0$, $a_2 \leftrightarrow 1$, …, $a_m \leftrightarrow m - 1$, …
Dunque: **n** è il cardinale infinito *più piccolo*.

Consideriamo l'insieme dei numeri interi Z; si crea una corrispondenza biunivoca con N:
$0 \leftrightarrow 0,\ 1 \leftrightarrow {}^{+}1,\ 2 \leftrightarrow {}^{-}1,\ 3 \leftrightarrow {}^{+}2,\ 4 \leftrightarrow {}^{-}2,\ \dots$
Dunque la cardinalità di Z è ancora **n**.

Nel tentativo di trovare quei diversi valori di infinito a cui faceva cenno Tommaso d'Aquino (vedi paragrafo 1.1.1), proviamo ora con Q, l'insieme dei numeri razionali. Ogni numero razionale $\frac{{}^{+}a}{{}^{-}b}$ lo possiamo pensare come un punto P di coordinate $({}^{+}a;\ {}^{-}b)$ disposto su un piano cartesiano.
Tutti i numeri razionali, allora, si possono disporre in questo modo con partenza nell'origine:



Solo alcuni di questi punti rappresentano numeri razionali (per esempio, il punto A (1 ; 0) non rappresenta alcun razionale). I punti che rappresentano razionali sono stati segnati nel disegno con insistenza. Nasce una successione di razionali che ha un primo elemento $(0\ ;\ {}^{-}1)$, un secondo $(1\ ;\ {}^{-}1)$, un terzo (1 ; 1) …; che rappresentano 0, $^{-}1$, 1 ... E dunque, abbiamo messo in corrispondenza biunivoca Q con N in quanto abbiamo "numerato" Q.
(C'è il problema dei "doppi", come per esempio $({}^{-}2\ ;\ 3)$ e $(2\ ;\ {}^{-}3)$ che sono punti diversi, ma che rappresentano lo stesso razionale: o si contano due volte, oppure si salta la seconda volta che si presenta).

Dunque la cardinalità di Q è ancora **n**.

Cantor dimostra inoltre che l'insieme dei numeri algebrici (soluzioni di equazioni) ha cardinalità **n**, contro ogni evidenza.

Quando sembra proprio che **n** non sia superabile, giunge alla dimostrazione chiave: l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1 (estremi esclusi) ha una cardinalità superiore ad **n**.
Siano, per assurdo:

$0, a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \dots$

$0, a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \dots$

$\dots$

$0, a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \dots$

$\dots$

tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1 (vale a dire: supponiamo siano una quantità numerabile).
Consideriamo la scrittura:

$0, b_1\ b_2 \dots b_n \dots$

nella quale $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, …, $b_n \neq a_{nn}$, …;
è allora ovvio che questa scrittura:

- *non* è compresa nell'elenco precedente di *tutti* i reali compresi tra 0 ed 1
- è un reale compreso tra 0 e 1

dunque abbiamo trovato una contraddizione, originata dall'aver supposto che i reali compresi tra 0 ed 1 avessero la cardinalità **n**.
(Valgono ancora una volta le considerazioni sulla doppia scrittura dei numeri razionali).

Dunque: i numeri reali compresi tra 0 e 1 sono infiniti, eppure non costituiscono un infinito numerabile.
n è il piccolo infinito, per cui i reali compresi tra 0 e 1 costituiscono un infinito *più grande*.
La data esatta di questa scoperta di Cantor è il 7 dicembre 1873, lo sappiamo perché egli comunicò la sua dimostrazione all'amico Dedekind con una lettera il giorno successivo.
La cardinalità dei reali compresi tra 0 ed 1 è la stessa di tutti i reali; la chiamiamo *cardinalità del continuo* e la indichiamo con **c**.
Con un piccolo abuso di linguaggio simbolico, scriveremo che:

$$\mathbf{n} < \mathbf{c}$$

Ma **c** è anche la cardinalità dei punti di una retta, dei punti di un piano, di qualsiasi varietà continua ad *m* dimensioni.

> *«Si può dire senz'altro che la teoria dei numeri transfiniti si mantiene o crolla insieme ai numeri irrazionali; la loro essenza è la stessa perché si tratta in ogni caso di esempi o variazioni dell'infinito attuale»* (Cantor, 1932, pag. 195-196).

Ora Cantor è a conoscenza che ci sono almeno due numeri infiniti: **n** e **c**. Egli si pone il problema seguente: trovare un insieme S di cardinalità **s**, tale che **n** < **s** < **c.**
Su questa ricerca, lavora a lungo. Ma poi, una curiosa analogia lo attira…

1.2.6 Ipotesi del continuo

Consideriamo un insieme finito I ed il suo cosiddetto insieme-potenza: P(I). D'ora in poi, per indicare la cardinalità di un insieme, scriveremo: | I |.
Si può dimostrare che:
$| P(I) | = 2^{| I |}$

Estendiamo questo concetto agli insiemi infiniti.
Dal metodo di Dedekind dei tagli (o sezioni) per introdurre i numeri reali, si nota che R non è altro che una classe di classi di tagli in Q;
e dunque | R | = | P(Q) |
Ma allora:

$$\mathbf{c} = 2^{\mathbf{n}}$$

Questa scrittura permette tra l'altro una bella dimostrazione:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 2^{\mathbf{n}} \cdot 2^{\mathbf{n}} = 2^{\mathbf{n} + \mathbf{n}} = 2^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}$$

(quindi il piano che è l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali, la cui cardinalità è **c** · **c** ha cardinalità **c,** già dimostrato in precedenza mediante la corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato e i punti di un suo lato).

Chiarito il senso dell'ordine tra numeri transfiniti, si può procedere con più facilità. Consideriamo l'insieme F delle funzioni da R in R. Chiamiamo **f** la cardinalità di F:

$$\mathbf{f} = 2^{\mathbf{c}}$$

così come i numeri naturali vanno in successione 0, 1, 2, 3, … aggiungendo sempre 1, così i numeri transfiniti vanno in successione **n**, **c**, **f**, **g**, … in questo modo:

$$\mathbf{n}, \qquad \mathbf{c} = 2^{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{f} = 2^{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{g} = 2^{\mathbf{f}}, \qquad \ldots$$

in una scalata senza fine. Se ci fosse fine, infatti, troveremmo un paradosso: un ente della massima cardinalità possibile, diciamo H, che ammette però una maggiorazione che passa attraverso il suo insieme-potenza P(H).

L'obiettivo era però cercare un insieme S tale che: $\mathbf{n} < | S | < \mathbf{c}$:
Ora la cosa si generalizza:
possiamo cercare un insieme S_1 tale che $\mathbf{c} < | S_1 | < \mathbf{f}$; e poi un altro S_2 tale che $\mathbf{f} < | S_2 | < \mathbf{g}$; e così via.
Nel 1883 Cantor scrisse che sperava di poter dimostrare di lì a poco che la cardinalità del continuo è la stessa di quella della seconda classe numerica, che è come dire che un tale insieme S non esiste. Tale ricerca risultò però vana: non riuscì a provarlo; né a provare il contrario (esibire un tale S).
Egli fa allora una congettura:
Ipotesi di Cantor o *ipotesi del continuo* (IC):

c segue strettamente **n** cioè non esiste un cardinale **s** tale che $\mathbf{n} < \mathbf{s} < \mathbf{c}$.[19]

Ora, se si ipotizza che **c** segue strettamente **n**, allora perché non generalizzare?
Ipotesi di Cantor o *ipotesi generalizzata del continuo* (IGC):

c segue strettamente **n**, **f** segue strettamente **c**, **g** segue strettamente **f**, e così via.

Dunque sono elementi di una nuova successione che si possono ribattezzare come segue:

$$\mathbf{n} = \aleph_0, \qquad \mathbf{c} = \aleph_1, \qquad \mathbf{f} = \aleph_2, \qquad \mathbf{g} = \aleph_3, \qquad \ldots$$

Dunque $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$

[Tra il 1938 e il 1940 **Kurt Gödel** dimostrerà che, assumendo IC nella *teoria degli insiemi* (la chiameremo ZF dal nome degli ideatori: Zermelo (che ideò gli assiomi nel 1908) e Frankel (che li riprese nel 1922 e li trascrisse nel linguaggio del Calcolo dei Predicati), non si introducono contraddizioni (in altri termini, IC è compatibile con ZF); dunque: IC o è indipendente dagli assiomi di ZF o può essere dimostrato sulla loro base. In altri termini, ciò significa che Cantor non aveva torto, cioè che da ZF non si può dedurre che **c** sia diverso da

[19] Come riferisce Rucker (1991): *«Cantor credeva fermamente che valesse $\mathbf{c} = \aleph_1$. Gödel, in una certa fase del suo pensiero, riteneva che* **c** *fosse $\aleph_2$ e D. A. Martin ha scritto un articolo da cui si potrebbe ricavare che* **c** *è $\aleph_3$».*

$\aleph_1$, ma allo stesso tempo non si può neanche provare che Cantor avesse ragione. Nel 1963 **Paul J. Cohen** ha dimostrato (con un metodo detto "forcing") che anche assumendo la negazione di IC non si introducono contraddizioni in ZF. Cioè: la negazione di IC è compatibile con ZF. Dunque, non si può dimostrare se Cantor avesse torto o ragione. Si ammette quindi che IC debba essere trattato come un nuovo assioma: se lo aggiungiamo a ZF abbiamo la "teoria *cantoriana* degli insiemi"; se aggiungiamo la sua negazione, abbiamo la "teoria *non-cantoriana* degli insiemi" (Gödel, 1940; Cohen, 1973)].

1.2.7 Giuseppe Peano (1858-1932)

Apriamo una piccola parentesi. Anche Peano ha a che fare con questioni aventi attinenza con l'infinito. La sua celebre sistemazione dei numeri naturali, ad un certo punto necessita di un assioma di induzione,[20] anzi si può dire che questo costituisce una proprietà fondamentale e fondante del concetto stesso di numero naturale (Borga et al., 1985). Il principio di induzione rappresenta oggi uno strumento essenziale nelle dimostrazioni aritmetiche e logiche che richiama l'infinito in senso potenziale.[21]

1.2.8 Cantor e gli ordinali

Torniamo a Cantor (questa parte è tratta da Rucker, 1991; D'Amore, 1994).

Definiamo ricorsivamente gli ordinali:

> 0 è un ordinale
>
> Principio 1:[22] di ogni numero ordinale a esiste il successivo $a + 1$
>
> Principio 2: data una successione crescente di ordinali a_n è definito il minimo ordinale [indicato con $\lim(a_n)$] che segue tutti gli ordinali della successione data.

Partendo da 0 applicando ripetutamente il Principio 1, otteniamo gli ordinali 0, 1, 2, 3, …

Ora, se vogliamo superare la successione infinita degli ordinali finiti, dobbiamo usare il Principio 2 per ottenere $\lim(n)$ che indichiamo con ω:

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad \ldots \qquad n \qquad n+1 \qquad \ldots \qquad \omega$$

---

[20] Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che 0 abbia tale proprietà P, supponiamo che, per ogni naturale x, se x ha la proprietà P allora anche x + 1 abbia la proprietà P, in queste condizioni possiamo asserire che: ogni numero naturale ha la proprietà P.

[21] Dal punto di vista didattico, sulle difficoltà che hanno gli studenti di scuola superiore ad accettare il principio di induzione hanno lavorato Fischbein e Engel (1989); Morschovitz Hadar (1991).

[22] In questo Principio si cela un fatto molto importante: *nessun ordinale è minore di se stesso.*

Questa è a sua volta una nuova successione di ordinali per cui, applicando ancora più volte di seguito il Principio 1, si ha:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n \quad n+1 \quad \ldots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \omega+2 \quad \omega+3 \quad \ldots$$

Ecco la nuova successione crescente di ordinali ($\omega + n$) e dunque applicando ancora ad essa il Principio 2 si crea $\lim(\omega+n)$:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \omega+2 \quad \omega+3 \quad \ldots \quad \omega+\omega$$

che possiamo scrivere come: $\omega+\omega$ o come $\omega \cdot 2$.

L'addizione e la moltiplicazione tra ordinali le definiamo così:

$a+b$:= contare a partire da $a + 1$ per b volte

$a \cdot b$:= giustapporre b copie di a

Finché si rimane nell'àmbito degli ordinali finiti, queste operazioni coincidono con la somma e prodotto usuali e sono commutative, ma quando consideriamo la loro estensione agli ordinali transfiniti la commutatività non si conserva.

Qualche esempio:

$1 + \omega = 1\ 0\ 1\ 2 \ldots =$ (ricontando daccapo) $0\ 1\ 2\ 3 \ldots = \omega$

$\omega+1 = 0\ 1\ 2 \ldots 1 = \omega+1$

e dunque: $1 + \omega = \omega \neq \omega+1$

$2 \cdot \omega = \quad 2 \quad 2 \quad 2 \ldots =$ (contando) $0\ 1\ 2 \ldots = \omega$

$\omega \cdot 2 =$ (giustapposizione due volte di ω) =

$= 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots = 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad \omega \quad \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \ldots = \omega + \omega$

e dunque: $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

Eravamo arrivati a $\omega \cdot 2$; applicando il Principio 1 più volte otteniamo:

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \omega+2 \quad \ldots \quad \omega\cdot 2 \quad \omega\cdot 2+1 \quad \omega\cdot 2+2 \quad \ldots$

e di nuovo il Principio 2, ottenendo $\lim(\omega \cdot 2 + n) = \omega \cdot 2 + \omega$ che chiameremo anche $\omega \cdot 3$.

Così proseguendo possiamo arrivare a $\omega \cdot n$, per ogni n finito, e quindi potremmo usare il Principio 2 per ottenere $\lim(\omega \cdot n)$ cioè ω copie di ω, dunque $\omega\cdot\omega$ che chiameremo anche ω^2.

E ancora avanti si capisce come si arriva a ω^3 e pian piano a:

$$\omega^{\omega}$$

Si può pensare ad ω^2 come al primo ordinale a per cui vale: $\omega + a = a$.

Infatti: ω^2 è come ω + ω + ω + ω + ω + … e quindi non cambia nulla se mettiamo un altro ω come addendo davanti.

Analogamente, il primo ordinale a per cui vale: $\omega \cdot a = a$ è ω^ω.

Infatti, ω^ω si può pensare come ω · ω · ω · ω…, ottenuto giustapponendo ω per ω volte; quindi nulla cambia se mettiamo un altro ω come fattore davanti: $\omega \cdot \omega^\omega = \omega^1 \cdot \omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$, dato che $1 + \omega = \omega$

Consideriamo il primo ordinale a per cui vale l'uguaglianza: $\omega^a = a$.

Questo numero è:

$$\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} \quad \text{(l'elevamento a potenza avviene } \omega \text{ volte).}$$

Infatti, se si mette alla base di questa scrittura un altro ω non cambia nulla: tali esponenti saranno 1 + ω che è sempre ω.

A questo numero è stato dato il nome ε_0 che da circa 200 anni è stato riservato a numeri reali "piccoli a piacere".

Introduciamo una nuova operazione:

$^a b \cdot = b^{b^{b^{\cdot^{\cdot^{b}}}}}$ (cioè b elevato a sé stesso, per a volte, contando la base).

Un esempio solo per dare un'idea di come crescono i numeri con questa nuova operazione:

$^3 3 = 3^{(3^3)} = 3^{27}$ quasi ottomila miliardi.

In base alla nuova operazione, ω^ω non è altro che $^2\omega$.

E quindi $^3\omega$ è $\omega^{(\omega^\omega)}$, un numero difficile da immaginare.

Torniamo a ε_0 che scritto nella nuova notazione è $^\omega\omega$.

ε_0 non è l'ultimo ordinale; ecco subito un altro ordinale più grande ancora:

$${}^{{}^{{}^{{}^{\cdots\,\omega}\omega}\omega}\omega}\omega$$

Ogni volta che si producono ordinali più grandi, si arriva ad una fermata momentanea, prima di intravedere come fare a produrne di ancora più grandi; questo rappresenta solo l'inizio (per un ampliamento di questo discorso si veda Rucker, 1991). [23]

1.2.9 Ordinali come cardinali

Riprendiamo il discorso, utilizzando gli aleph.

ω è proprio $\aleph_0$, il primo cardinale infinito.

Ma ω+1, ω+2, …, 2 · ω sono anche loro tutti $\aleph_0$.

$n \cdot \omega, \ldots, \omega^{\omega}$ sono sempre $\aleph_0$

$\omega^{\omega}+1, \ldots, {}^{\omega}\omega$ sono sempre $\aleph_0$

Dunque: ω è il più piccolo ordinale uguale ad $\aleph_0$; ma finora non siamo cresciuti. Anche ε_0 non è altro che un "banale" $\aleph_0$. Ogni insieme ordinato con ordinalità ω, …, ${}^{\omega}\omega$ si può sempre mettere in corrispondenza biunivoca con N.

Ma così come possiamo trovare ordinali sempre più grandi, possiamo ora trovare cardinali sempre più grandi:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\aleph_1}, \ldots, \aleph_{\aleph_\omega}, \ldots$$

Possiamo perfino trovare un numero θ tale che $\theta = \aleph_\theta$

Questo θ è di questo tipo:

$$\theta = \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\ddots}}}}}$$

θ chiude un ciclo.

Per ora, perché dopo $\aleph_\theta$ viene $\aleph_{\theta+1}, \ldots, \aleph_{\theta+\omega}, \ldots$

Non si arriva mai alla fine nella scoperta dei numeri transfiniti.

Proviamolo:

- Un insieme S è finito o numerabile se e solo se $|S| \leq \aleph_0$

[23] In Bachmann (1967) si trova la descrizione forse più esauriente dei sistemi di notazioni per ordinali numerabili. Invece in Cantor (1955) si trova la più chiara tra le descrizioni degli ordinali transfiniti date da Cantor.

- I Principi 1 e 2 danno luogo ad un più forte Principio 3: per ogni insieme di ordinali *A* esiste il minimo ordinale maggiore di ogni elemento di *A* che diremo *supA*.

Consideriamo la raccolta O*n* di tutti gli ordinali. Se O*n* fosse un insieme, allora esisterebbe per il Principio 3 un ordinale supO*n* (diciamolo Ω, l'Infinito Assoluto che si colloca alla fine della successione degli ordinali). Ma questo è impossibile, perché se Ω fosse un ordinale, allora Ω sarebbe un elemento della collezione O*n* di tutti gli ordinali e quindi sarebbe $\Omega <$ sup O*n* $= \Omega$, contraddicendo la proprietà fondamentale degli ordinali in base alla quale nessun ordinale può essere minore di se stesso.[24]

Quindi il Principio 3 stabilisce che nessun insieme di ordinali può raggiungere Ω.

Concludiamo con il passo seguente che è tratto da una lettera di Cantor a Dedekind del 28 agosto 1899:

> «*Ci si potrebbe chiedere se gli insiemi bene ordinati o le successioni che corrispondono ai numeri cardinali* $\aleph_0$, $\aleph_1$, ..., $\aleph_\omega$, ... $\aleph_{\aleph_1}$, ... *siano realmente insiemi nel senso di essere "molteplicità coerenti". Non è possibile che queste molteplicità siano "incoerenti" e che la contraddizione derivante dall'assunzione che tali molteplicità esistano come insiemi unificati non sia stata ancora notata?*
> *La mia risposta è che la stessa domanda si potrebbe porre a proposito degli insiemi finiti e che se uno ci pensa con attenzione diventa chiaro che non è possibile dare nessuna dimostrazione di coerenza nemmeno per le molteplicità finite. In altre parole: il fatto costituito dalla coerenza delle molteplicità finite è una verità semplice e indimostrabile che potremmo chiamare "assioma dell'aritmetica" (nel vecchio senso della parola). Analogamente, la coerenza di quelle molteplicità che hanno gli alef come cardinalità costituisce "l'assioma dell'aritmetica estesa al transfinito"*» (Meschkowski, 1967).

Sembra che Cantor faccia riferimento a una percezione semplice e diretta della realtà dei numeri cardinali nel Regno dei Pensieri. Non solo, nel 1899 fece un'asserzione che rivelò il suo grande coraggio intellettuale: «*Un numero come* $\aleph_2$ *è molto più facile da percepire di un numero naturale casuale di dieci milioni di cifre*» (contenuta anche in Cantor, 1932). Questa azzardata affermazione di Cantor sarà difficile da condividere dopo aver rivelato le convinzioni degli insegnanti proposte nei capitoli 3 e 4.

[24] Questa situazione fu rivelata da Cesare Burali-Forti nel 1897 ed era già stata notata in precedenza da Cantor.

Capitolo 2. Contesto internazionale di ricerca

I lavori di ricerca relativi all'infinito matematico che saranno descritti nei capitoli 3 e 4 rientrano nell'attuale panorama della ricerca in didattica della matematica che sembra tutta tesa ad accentrare l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento da un punto di vista fondazionale. In questo senso, faremo riferimento a ciò che s'intende oggi per *didattica fondamentale* (Henry, 1991; D'Amore, 1999), ossia a tutto quanto concerne gli elementi di base della ricerca in didattica della matematica che traggono spunto dalle molteplici e complesse analisi del cosiddetto "triangolo della didattica" (vedi paragrafo 2.4). In questo senso forniremo una breve panoramica dei temi più salienti menzionati nei prossimi capitoli che rappresenta una riproposta di lavori di D'Amore (1999; 2002; 2003) nei quali l'autore interpreta in modo personale un percorso della didattica della matematica che condividiamo in pieno.

2.1 Il contratto didattico

Il primo tentativo di "definizione" dell'idea di contratto didattico è il seguente: «*In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico*» (Brousseau, 1980a). Questa idea è stata riconosciuta da vari studiosi di tutto il mondo ed è entrata a far parte del linguaggio condiviso dell'intera comunità internazionale fin dalla seconda metà degli anni '80 (Brousseau 1980b, 1986, Brousseau e Pères, 1981; Chevallard, 1988; Sarrazy, 1995; Schubauer-Leoni, 1996). Ovviamente, con il passare degli anni, l'idea originale di contratto didattico è stata più volte reinterpretata da vari Autori, a volte, come dichiara Sarrazy (1995), con modalità ed approcci molto diversi tra loro. Tornando all'idea originale, le "attese" di cui parla Brousseau non sono da considerarsi nella maggior parte dei casi dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità (D'Amore, 1999; 2002;

2003). In questi ultimi decenni, lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha portato a grandi risultati, permettendo di interpretare e di chiarire molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura degli studenti (Baruk, 1985; Spagnolo, 1998; Polo, 1999; D'Amore, 1999). Questi studi hanno permesso di rivelare appunto che i bambini ed i ragazzi hanno attese particolari, schemi generali, comportamenti che nulla hanno a che fare con la matematica, ma che dipendono da motivazioni molto più complesse ed interessanti derivanti dal contratto didattico instaurato in classe (D'Amore, 1993b; D'Amore e Martini, 1997; D'Amore e Sandri, 1998). Per modificare tali comportamenti lo studente deve essere in grado di provocare una *rottura del contratto didattico* (Brousseau, 1988; Chevallard, 1988), facendosi carico personale delle sue scelte. In effetti, rompendo il contratto didattico l'allievo produce una nuova situazione che contrasta con tutte le sue attese, le sue abitudini, con tutte le clausole che sono state messe in campo fino a quel momento nelle situazioni didattiche. Per far questo, lo studente deve avere la forza di osare in prima persona, sfidando le supposte clausole del contratto e questo può avvenire solo se l'insegnante ha creato le condizioni favorevoli perché avvenga questa rottura.

2.2 Immagini e modelli

Nel parlare di *"immagine"* e di *"modello"* accetteremo completamente la seguente terminologia e trattazione presentata da D'Amore (1999, pag. 151; 2002; 2003):
Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione interna o esterna. L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali,[25] in poche parole è un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può essere elaborata più o meno coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo), tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria. L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno

[25] Con stile cognitivo intendiamo l'insieme delle caratteristiche personali che ciascun individuo ha e mette in opera nel processo di apprendimento in modo più o meno consapevole; queste sembrano non dipendere solo da fatti "naturali", ma pure da stati d'essere momentanei, disponibilità, interesse e motivazione, ... Per esempio, si impara ad apprendere acusticamente o visivamente, ci si abitua ad apprendere manipolando immagini o manipolando simboli, … (De La Garanderie, 1980; Gardner, 1993; Sternberg, 1996).

coscientemente), tutte relative ad un certo concetto, costituisce il *modello mentale* (interno) del concetto stesso.

Ossia, lo studente si costruisce un'immagine di un concetto che crede stabile e definitiva, ma ad un certo punto della sua storia cognitiva, riceve informazioni sul concetto che non sono contemplate dall'immagine che possedeva. L'allievo deve allora adeguare la "vecchia" immagine ad una nuova, più ampia, che oltre a conservare le precedenti informazioni, accolga anche le nuove, costruendosi così una nuova immagine del concetto. Questo può avvenire anche per mezzo di un *conflitto cognitivo* (vedi paragrafo 2.3) voluto dall'insegnante. Tale situazione può ripetersi più volte durante la "storia scolastica" di un allievo. Molti dei concetti della matematica sono raggiunti grazie a passaggi nel corso degli anni, da un'immagine ad un'altra più potente e si può immaginare questa successione di immagini come una specie di scalata che si "avvicina" al concetto.

Ad un certo punto di questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine ottenuta "resiste" a sollecitazioni diverse e si dimostra abbastanza "forte" da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che si incontrano rispetto al concetto che rappresenta. Un'immagine di questo tipo forte e stabile, si può chiamare *modello* del concetto.

"Farsi un modello di un concetto", dunque, significa rielaborare successivamente immagini deboli e instabili per giungere ad una di esse definitiva, forte e stabile.

Si può verificare che:

- *il modello si sia formato al momento giusto* nel senso che si tratta davvero del modello corretto, proprio quello previsto per quel concetto dal sapere matematico. In questo caso, l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello corretto del concetto;

oppure:

- *il modello si è formato troppo presto*, quando ancora sarebbe dovuta essere solamente un'immagine debole che necessitava di essere ulteriormente ampliata; a questo punto per l'allievo non è facile raggiungere il concetto perché la stabilità del modello è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

Cerchiamo di fornire altre chiavi di lettura utili per le interpretazioni dei prossimi capitoli. Si riserva il nome di *modello intuitivo* a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte. È in questo tipo di modello che si crea subito una corrispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando. Questo modello si crea di solito come conseguenza della proposta da parte dell'insegnante di un'immagine forte e convincente di un concetto, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze (Fischbein, 1985, 1992). Ma non è detto che questo modello rispecchi il concetto di cui si parla; in questo caso si parla, talvolta, di *modelli parassiti,* cioè di modelli creatisi con la ripetizione, ma niente affatto auspicati (Fischbein, 1985). Esempi di modelli di questo tipo si possono trovare in D'Amore (1999).

Ciò che va precisato è che didatticamente bisognerebbe evitare che l'immagine-misconcezione (vedi paragrafo 2.3), essendo per sua stessa natura in attesa di definitiva sistemazione, si trasformi in modello; in quanto accomodare un modello parassita trasformandolo in un nuovo modello comprensivo di una diversa situazione non è affatto facile, dato che il modello è per sua stessa natura forte e stabile. Bisognerebbe quindi lasciare le immagini instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi al momento giusto, ossia quando risultano vicini al sapere matematico che si vuole raggiungere. Per evitare l'insorgere di modelli parassiti, l'insegnante dovrebbe quindi non solo non dare informazioni distorte e sbagliate in modo esplicito, ma addirittura evitare che si formino autonomamente nella mente degli allievi. Per riuscire in questo arduo obiettivo, occorre che l'insegnante possieda una solida e ricca competenza, non solo in matematica, ma anche in didattica della matematica.

2.3 Conflitti e misconcezioni

Un altro argomento di studio in didattica della matematica che rientra in questa trattazione riguarda i *conflitti cognitivi* (Spagnolo, 1998; D'Amore, 1999, pag. 123; 2003). Lo studente nel tempo si costruisce un concetto e se ne fa un'immagine che può essere stata validata e rinforzata nel corso del suo curricolo scolastico da prove, esperienze ripetute, figure, esercizi risolti tanto più se valutati dall'insegnante come corretti. Questa immagine, però, può non essere adeguata rispetto ad un'altra inattesa immagine dello stesso concetto che risulta in contrasto con la precedente, proposta dall'insegnante stesso o da altri. Si crea così un *conflitto* tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, relativamente a quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva. Dunque, il *conflitto cognitivo* è un conflitto "interno" causato dalla non congruenza tra due concetti o tra due immagini o tra un'immagine ed un concetto.

Alla base dei conflitti vi sono delle *misconcezioni*, cioè concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica (D'Amore, 1999, pag. 124). Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione. Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute. Chiamarle *errori* è troppo semplicistico e banale; in un certo senso, dato che anche i bambini molto piccoli hanno concezioni matematiche ingenue ma profonde (Aglì e D'Amore, 1995) ottenute empiricamente o per scambio sociale, si potrebbe addirittura pensare che tutta la carriera scolastica di un individuo, per quanto attiene la matematica, sia costituita dal passaggio da misconcezioni a concezioni corrette. Sembrano cioè un momento delicato necessario di passaggio, da una prima concezione elementare: ingenua, spontanea, primitiva ad una più elaborata e corretta.
Esempi di conflitti e misconcezioni si possono trovare in D'Amore (1999).

2.4 Il triangolo: insegnante, allievo, sapere

Negli ultimi venti anni la ricerca in didattica della matematica ha analizzato in diversi modi e con accurati dettagli, quello che si nasconde dietro il "triangolo" che ha come "vertici": l'allievo, l'insegnante e il sapere (Chevallard e Joshua, 1982; Chevallard, 1985; D'Amore, 1999; D'Amore e Fandiño, 2002).

Secondo quanto sostiene la *didattica fondamentale*, questo rappresenta un *modello sistemico* che serve per situare e analizzare i molteplici rapporti che si instaurano tra i tre "soggetti" che rappresentano i "vertici" del triangolo. La natura complessa del modello sistemico deriva dal considerare contemporaneamente tutte le mutue relazioni tra i “vertici”, comprese molteplici implicazioni di varia natura.

I “vertici”

In questo paragrafo faremo riferimento alla sintesi riportata in D’Amore e Fandiño (2002) dove si mette in evidenza come ogni “vertice” del triangolo agisca da polo:

- *il sapere* inteso come quello accademico, ufficiale, universitario, rappresenta il polo ontogenetico o epistemologico. È nei dintorni di questo vertice che si situa la teoria degli *ostacoli epistemologici* (vedi paragrafo 2.5) legati alla natura intrinseca del concetto, alla sua evoluzione o alla complessità formale delle sue strutture.

- *l’allievo* rappresenta il polo genetico o psicologico. In questo vertice si fa riferimento a progetti culturali o cognitivi personali, filtrati però dal rapporto di *scolarizzazione*[26] che fa sì che le esperienze personali di un soggetto apprendente non siano libere da vincoli. È nei dintorni di questo polo che si situa la teoria degli *ostacoli ontogenetici* (vedi paragrafo 2.5).

- *l’insegnante* rappresenta il polo funzionale o pedagogico. In questo vertice si fa riferimento a progetti culturali o cognitivi sui quali influiscono in modo notevole l’insieme delle attese pedagogiche (non sempre esplicite), delle credenze relative al sapere, delle convinzioni professionali, delle “filosofie implicite” (Speranza, 1992).[27] È nei dintorni di questo polo che si situa la teoria degli *ostacoli didattici* (vedi paragrafo 2.5), dato che è l’insegnante il responsabile delle scelte e dei progetti didattici.

[26] Riprendendo l’idea di D’Amore (1999): *«Con il termine “scolarizzazione del sapere” intendo qui riferirmi a quell’atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l’allievo, ad un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della Scuola Elementare), delega alla Scuola (come istituzione) ed all’insegnante di scuola (come rappresentante dell’istituzione) il compito di selezionare per lui i saperi significativi (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato dalla noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione …)»*.

[27] Si tratta di quelle “filosofie” che Speranza chiama “implicite”, cioè esistenti e influenti, ma non esplicitate nella pratica didattica.

I “lati”

Sempre in D’Amore e Fandiño (2002) si commentano i “lati” che evidenziano le relazioni tra coppie di poli:

• *insegnante-allievo* che è talvolta riassunto nel verbo *“animare”* (termine che si collega alla *motivazione*, all’interesse, alla *volizione*[28], ...), nel quale si possono rintracciare i seguenti due concetti:

- la *devoluzione* che rappresenta l’azione dell’insegnante verso l’allievo, che lo spinge ad implicarsi nel progetto didattico che lo riguarda; è quindi il processo o l’attività di responsabilizzazione attraverso i quali l’insegnante ottiene che lo studente impegni la sua personale responsabilità in un’attività cognitiva che diventa allora attività cognitiva dell’allievo;

- l’*implicazione* che rappresenta l’azione dell’allievo su se stesso: l’allievo accetta la devoluzione, accetta cioè di farsi carico personale della costruzione della propria conoscenza.

“Animare” può quindi essere interpretato come spingere all’implicazione personale, favorendo la devoluzione.

Nel complesso intreccio che c’è tra devoluzione e implicazione, si trovano le *situazioni a-didattiche*[29] (Brousseau, 1986) che sono quelle situazioni che realizzano il “passaggio” tra

---

[28] Riteniamo importante precisare la distinzione tra *motivazione* e *volizione* presentata in Pellerey (1993, pag. 1010), che riguarda nel primo caso «*la formazione delle intenzioni, cioè l’elaborazione delle ragioni che inducono a fare qualcosa*» e nel secondo caso «*il concreto voler conseguire il fine espresso dalle intenzioni*». Essere motivati a fare qualcosa, ad esempio apprendere, non significa quindi essere poi concretamente disposti a farlo, né tanto meno perseverare di fronte alle prime difficoltà o agli insuccessi. L’utilizzazione in contesto didattico di questa distinzione risale invece a D’Amore e Fandiño (2002).

[29] In un ambiente organizzato per l’apprendimento di un certo argomento, si ha una *situazione a-didattica* quando viene a cadere l’intenzione didattica esplicita. L’insegnante propone un’attività senza dichiararne lo scopo; lo studente sa bene che ogni attività in aula ha lo scopo di fargli costruire una conoscenza, ma in questo caso non sa quale. Se decide di partecipare all’attività, cioè se accetta di implicarsi, allora si libera dai condizionamenti “contrattuali” (vedi paragrafo 2.1) e partecipa ad un’attività a-didattica. Il docente è in questo caso solo spettatore, ovvero non implicato esplicitamente nella gestione di un sapere. L’insegnante dissimula il proprio fine didattico, dissimula la propria volontà di insegnare e ciò allo scopo di far sì che lo studente accetti la situazione cognitiva come proprio carico personale.

devoluzione ed implicazione. Il confronto dell'allievo con una *situazione didattica*[30] strutturata secondo precise "regole del gioco", invece, non garantisce di per sé acquisizione di conoscenza se essa non prevede, al suo interno, il confronto dell'allievo con una situazione di tipo *a-didattica*. In questo caso è come se si interrompesse il rapporto insegnante-allievo a favore del rapporto allievo-situazione: l'allievo produce la sua conoscenza in risposta personale alle richieste del *milieu*[31] piuttosto che alle attese dell'insegnante. Il milieu non è "costruito" dall'insegnante, esso preesiste alla situazione didattica riferendosi piuttosto, in modo più generale, all'insieme di oggetti (mentali e concreti) che sono conosciuti dai soggetti del sistema indipendentemente dal fatto che tali oggetti intervengano, in quel momento, nel processo di acquisizione del sapere in gioco.

Gli elementi caratterizzanti questo lato sono ad esempio:
- il contratto didattico (vedi paragrafo 2.1);
- gli ostacoli didattici (vedi paragrafo 2.5);
- le relazioni pedagogiche;
- la valutazione (Fandiño Pinilla, 2002);
- la scolarizzazione;
- la devoluzione o la sua mancanza;

…

• *allievo-sapere,* caratterizzato dal verbo *"apprendere"*, dove l'attività che domina è l'*implicazione* che consente un accesso ad un "sapere personale" che verrà *istituzionalizzato* (vedi lato insegnante-sapere) dall'insegnante incentivando la costruzione della conoscenza. In questo lato si trovano le immagini che ha lo studente di scuola, di cultura, … il suo rapporto personale specifico con la matematica e, più in generale, con l'istituzionalizzazione del sapere

[30] Si parla di *situazione didattica* quando si prende in esame un sistema educativo esplicito, per esempio la figura dell'insegnante che sta agendo come tale e che dichiara esplicitamente ai suoi allievi qual è il sapere in gioco in quel momento.

[31] Nell'ambito della *Teoria delle Situazioni Didattiche*, Brousseau (1989, pag. 312), anche allo scopo di delineare il carattere sistemico del suo approccio, introduce la nozione di *milieu*: *«una modellizzazione, per il ricercatore, dell'ambiente e delle sue risposte pertinenti per l'apprendimento in corso. Non è che una parte della situazione (didattica). (...) Esso gioca dunque un ruolo centrale nell'apprendimento, come causa degli adattamenti (da parte dell'allievo) e nell'insegnamento, come riferimento e oggetto epistemologico».*

che dipende molto dall'età, dalle esperienze pregresse, dalla famiglia, dal tipo di società in cui l'allievo vive.

Gli elementi che caratterizzano questo lato sono:
- le diverse teorie dell'apprendimento;
- il ruolo e la natura delle concezioni;
- la teoria degli ostacoli epistemologici;
…

• *insegnante-sapere* dove il verbo che domina è *"insegnare"* e le attività caratterizzanti sono: *l'istituzionalizzazione delle conoscenze* (Chevallard, 1992) e la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985, 1994; Cornu e Vergnioux, 1992).

L'*istituzionalizzazione delle conoscenze*[32] rappresenta un processo complementare alla devoluzione e all'implicazione, che avviene quando l'insegnante riconosce come sapere legittimo e spendibile nel contesto scuola il sapere acquisito con l'impegno personale dell'alunno, una volta che si sono verificate la devoluzione e l'implicazione dell'allievo.

L'attività più generale che caratterizza questo lato rappresenta la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985) che è intesa come il lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento in funzione del luogo, del pubblico e delle finalità didattiche che ci si pone e che risulterà fondamentale per la trattazione di questa tesi (vedi cap. 4). L'insegnante deve perciò operare una trasposizione dal *sapere* (che sorge dalla ricerca) al *sapere insegnato* (quello della pratica in aula);[33] in realtà, il passaggio è molto più complesso perché va dal *sapere* (quello degli esperti della disciplina che strutturano e organizzano tale sapere) al *sapere da insegnare* (quello deciso dalle istituzioni) al *sapere insegnato* (quello che l'insegnante sceglie come oggetto specifico del suo intervento didattico).

---

[32] Secondo Brousseau (1994): *«l'istituzionalizzazione del compito è l'atto sociale attraverso il quale il maestro e l'allievo riconoscono la devoluzione»*.

[33] L'insegnante non è mai un individuo isolato quando estrae un elemento del sapere dal suo contesto universitario, sociale, per riambientarlo nel contesto sempre singolare e unico della propria aula; è di fatto il collettivo, l'istituzione che oggettivizza e definisce nella sua specificità il sapere scolare, i suoi metodi, la sua razionalità. La trasposizione didattica produce allora un certo numero di effetti: semplificazione e dedogmatizzazione, creazione di artefatti o produzione di oggetti totalmente nuovi.

Il passaggio tra *sapere* e *sapere da insegnare*, è filtrato dalle scelte epistemologiche dell'insegnante che dipendono dalle sue convinzioni, dalle sue "filosofie implicite", dall'idea che ha di trasposizione didattica, dall'influenza della *noosfera,*[34] …
Gli elementi caratterizzanti questo lato sono quindi le credenze dell'insegnante relative a: sapere, allievi, apprendimento, scopi dell'educazione, idea di scuola, …

In questa analisi, il "triangolo" non ha funzione esplicativa e descrittiva dell'esperienza scolastica ma, soprattutto, metodologica: ciascun "vertice" del sistema è l'osservatore dal quale si cerca di guardare alla relazione tra gli altri due, pur nella consapevolezza che nessuno degli elementi coinvolti può essere totalmente separato dagli altri. Inoltre lo sforzo in esso implicito, è di rendere tale schema quanto più possibile comprensivo della molteplicità di fattori (o di variabili) che insistono sull'esperienza educativa intesa come esperienza problematica.
In questo modello sistemico si distinguono quindi almeno tre categorie di enti che incidono:
- *elementi* (che si identificano con i "vertici" o poli)
- *relazioni* tra elementi (che si identificano con i "lati")
- *processi* che identificano le modalità di funzionamento del sistema (es.: devoluzione, trasposizione didattica, ingegneria didattica, ...).

Su tutto il triangolo pesa poi la *noosfera* con le sue attese, le sue pressioni, le sue scelte a monte.

2.5 Gli ostacoli

Sappiamo quanto sia difficile che si formi un concetto; in particolare, come vedremo durante l'intera trattazione di questa tesi, quello di infinito matematico. Questo avviene perché ogni concetto, anche semplice in apparenza, è circondato da un intorno fluttuante e complesso di rappresentazioni associate che comportano molteplici livelli di formulazione e livelli di integrazione del concetto (Giordan e De Vecchi, 1987). Dunque, il primo problema è quello

[34] La *noosfera* è una sorta di zona intermedia tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola). In essa si articolano i rapporti tra i due sistemi, in un tutto unico, con i loro conflitti. La noosfera si potrebbe pensare come *«la cappa esterna che contiene tutte le persone che nella società pensano ai contenuti ed ai metodi di insegnamento»* (Godino, 1993).

di “ripulire” il concetto da questo alone che sembra nasconderne il significato intimo ed è questo che abbiamo tentato di fare con gli insegnanti per quanto riguarda l’infinito matematico (paragrafo 4.1).
Da questo punto di vista bisogna tener presente anche gli *ostacoli* che si frappongono all’apprendimento, proposti inizialmente da Guy Brousseau (1983; 1986) e che assumono un ruolo centrale in questo lavoro di ricerca (Ferreri e Spagnolo, 1994; Spagnolo, 1998).
Riprendendo le parole di D’Amore (1999, pagg. 209-218): *«Un ostacolo è un’idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l’idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l’essere una barriera verso successivi apprendimenti».*

Brousseau distingue tre tipi di *ostacoli*:
- di natura *ontogenetica*
- di natura *didattica*
- di natura *epistemologica.*

• L’*ostacolo ontogenetico* è legato all’allievo ed alla sua maturità. Ogni soggetto che apprende sviluppa delle capacità e delle conoscenze che sono adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dell’età cronologica), ma per acquisire certi concetti, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti e costituire quindi ostacoli di natura ontogenetica; per esempio, l’allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica (Spagnolo, 1998).

• L’*ostacolo didattico* dipende dalle scelte strategiche dell’insegnante. Ogni docente sceglie un progetto, un curricolo, un metodo, interpreta in modo personale la trasposizione didattica che rispetta le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche. Egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, potrebbe non esserlo per altri. Per questi ultimi, la scelta di quel progetto potrebbe rivelarsi un ostacolo didattico. Questi tipi di ostacoli saranno al centro della trattazione di questa tesi (vedi cap. 3 e 4).

• L'*ostacolo epistemologico* dipende dalla natura stessa dell'argomento. Per esempio, quando nella storia dell'evoluzione di un concetto matematico si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso (Spagnolo e Margolinas, 1993; Spagnolo, 1998; D'Amore, 1999, pag. 213). L'infinito matematico è da questo punto di vista un esempio emblematico e la storia di questo argomento presentata nel cap. 1 ne è la testimonianza. Quest'ultimo aspetto si manifesta in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, che si ripresentano anno dopo anno in diverse classi (vedi cap. 4); ma non solo, per quanto concerne l'infinito matematico, si possono rintracciare discontinuità anche nelle concezioni degli insegnanti (vedi cap. 3 e 4) o di chiunque non sia venuto a contatto diretto con questo argomento (Spagnolo, 1995, pagg. 10-12).

Capitolo 3. Le convinzioni[35] degli insegnanti di scuola primaria sull'infinito matematico[36]

Le riflessioni che seguiranno si riferiscono ad un percorso di ricerca durato vari anni relativo all'infinito matematico; un argomento che, come abbiamo potuto percepire nel capitolo 1, ha rappresentato, e rappresenta tutt'ora, un tema affascinante che fornisce all'uomo profonde occasioni di riflessione.

Sorge spontaneo domandarsi perché questo tema così specifico e difficile sia rivolto in questa ricerca alla scuola primaria; ma è proprio a partire da questo livello scolastico che l'allievo viene a contatto con insiemi infiniti come la successione dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, … che è forse il primo e il più spontaneo esempio di insieme di questo tipo.

Già dai primi anni di scuola primaria si sottolinea come questa successione non ha termine, non ha "fine", esiste sempre un numero "più grande" di quello considerato, basta aggiungere un'unità; e questo procedimento può continuare per sempre, all'"infinito", appunto. Si sottolinea quindi come, considerato un qualsiasi numero naturale n, si possa sempre trovare il numero naturale successivo $n + 1$; questo procedimento genera, passo per passo, la successione dei numeri naturali e costituisce anche la base di uno degli schemi fondamentali del ragionamento matematico, il principio di induzione matematica, che rappresenta un assioma del "delicato" sistema assiomatico di Peano (vedi paragrafo 1.2.7) (Borga et al., 1985).

È abbastanza frequente notare come i bambini di scuola primaria riferendosi ai numeri, citino e parlino di infinito; ad esempio, durante una sperimentazione in una scuola primaria di Mirano (VE), Marco di seconda scrive la seguente lettera ai compagni di prima in seguito alla proposta dell'insegnante di descrivere ciò che li aveva incuriositi di più:

---

[35] Abbiamo scelto di parlare di *convinzioni* invece che di *concezioni*, in quanto riteniamo che l'interpretazione che viene solitamente fornita del primo termine sia più consona alla nostra ricerca. Per *convinzione (belief) (o credenza)* si intende *«un'opinione, un insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa»* (D'Amore e Fandiño, 2004) mentre l'interpretazione di concezione che facciamo nostra, peraltro sempre più diffusa e condivisa, è la seguente: *«l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la concezione (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T»* (D'Amore e Fandiño, 2004).

[36] Questo capitolo è stato pubblicato in Sbaragli (2003a).

Cari bambini di prima, lo sapete che cosa vuol dire contare all'infinito? Vuol dire che se contate per 1000 anni di seguito c'è sempre un numero maggiore di quello dove siete arrivati! C'è sempre un numero in più e così per sempre. Provate a occhi chiusi a contare, diventerete nonni e starete ancora contando. E sarete vecchi con la barba, sarete troppo vecchi che i vostri genitori non vi riconosceranno più!

Questa parola, infinito, risulta quindi affascinante per i bambini fin dalla scuola primaria; sembra infatti che già da questa età si riesca a percepire quella sorta di mistero che accompagna questo termine. Spesso gli studenti, fin dai primi anni di scuola, si riempiono la bocca con questa parola ancora sconosciuta, intuendone la "potenza" ed il fascino, e questo termine li accompagnerà fino alle scuole secondarie o in alcuni casi fino all'Università, rimanendo però molte volte un concetto incompreso in senso matematico.

3.1 L'infinito matematico e la diversa natura degli "ostacoli"

Alla base delle seguenti considerazioni sull'infinito vi sono gli studi apportati in questo campo da diversi ricercatori in didattica della matematica che hanno analizzato la problematica dell'insegnamento e dell'apprendimento di questo argomento mettendo in evidenza i processi mentali degli studenti, le loro convinzioni e le loro accettazioni intuitive che sono il risultato di misconcetti assai diffusi sui diversi aspetti dell'infinito matematico [fra i molti esempi, si vedano i classici lavori di Tall (1980), di Waldegg (1993) e quelli più recenti di Fischbein, Jehiam e Cohen (1994, 1995), di Tsamir e Tirosh (1994, 1997), di D'Amore (1996, 1997), di Arrigo e D'Amore (1999, 2002), di Tsamir (2000)]. Queste ricerche coinvolgono diversi indirizzi tutti legati al tema dell'infinito e hanno come filo conduttore il mettersi "dalla parte degli allievi" per esaminare quali siano i motivi che fanno della problematica dell'infinito una tematica così difficile da essere appresa.

In quest'ottica è d'obbligo far riferimento all'importante campo di studio relativo alla didattica della matematica sui cosiddetti *ostacoli* che si frappongono alla costruzione della conoscenza: ostacoli ontogenetici, didattici, epistemologici (Brousseau, 1983; Perrin Glorian, 1994; D'Amore, 1999), (vedi paragrafo 2.5).

Per quanto riguarda la trattazione dell'infinito matematico nella scuola primaria, sicuramente saranno presenti *ostacoli ontogenetici* legati all'immaturità concettuale e critica causati principalmente dall'età degli alunni (Spagnolo, 1998); ma non per questo si devono sottovalutare le prime intuizioni, le prime immagini, i primi modelli che si formano nella mente dei bambini fin dalla scuola primaria, come conseguenza anche delle sollecitazioni degli stessi insegnanti.

Inoltre, la letteratura internazionale partendo dallo sviluppo storico di questo controverso argomento (vedi cap. 1) ha saputo mettere in evidenza gli *ostacoli epistemologici* che si frappongono all'apprendimento dell'infinito matematico e che permettono di spiegare alcune difficoltà incontrate dagli studenti (si veda ad esempio Schneider, 1991).

In questa ricerca vogliamo vagliare se è possibile che si verifichino anche *ostacoli didattici*, forse ancora più influenti, dovuti a scelte didattiche degli insegnanti che condizionano e rafforzano le prime misconcezioni (vedi paragrafo 2.3) degli allievi. La presenza di ostacoli didattici nell'apprendimento dell'infinito matematico è già stata rilevata da Arrigo e D'Amore (1999 e, soprattutto, 2002).

Per chiarire lo scopo della presente ricerca, facciamo alcune considerazioni legate agli ostacoli epistemologici. Per quanto concerne lo sviluppo storico di un concetto, si può pensare che vi sia stato un passaggio nell'arco della storia da una fase "iniziale" intuitiva ad una fase "finale" del concetto stesso (forse sarebbe meglio chiamarla "attuale" o "avanzata"), matura (nel momento in cui se ne parla) e strutturale; è ovvio che questa è solo una schematizzazione, dato che tra queste due fasi considerate come il punto di partenza e il punto di arrivo (nel momento in cui se ne parla) vi sono tanti altri passaggi fondamentali che permettono di raggiungere la fase "attuale" del concetto (Sfard, 1991).

Ciò che è avvenuto nella storia della matematica si può rintracciare in àmbito didattico; in effetti alcune delle prime ingenue intuizioni che si sono avute storicamente sul tema dell'infinito, si possono rintracciare nuovamente nelle considerazioni e convinzioni manifestate intuitivamente dagli studenti in classe.

Ossia dal punto di vista didattico, si può rilevare una situazione analoga a quella che è avvenuta storicamente: in una prima fase gli allievi si accostano intuitivamente ad un concetto matematico, senza averne una comprensione completa e sviluppata,[37] solo successivamente l'apprendimento si fa più pieno e maturo (Sfard, 1991).

[37] Questo deriva anche dalla necessità della matematica di richiedere il coordinamento dei registri semiotici, che può essere acquisito solo con il tempo e che è la condizione per la padronanza della comprensione, in quanto rappresenta la condizione per una differenziazione reale tra gli oggetti matematici e le loro rappresentazioni (Duval, 1995, pag. 259).

Si possono quindi ipotizzare due percorsi in “parallelo”: il primo riferito allo sviluppo storico del sapere, il secondo riferito ad un analogo percorso di ciò che avviene in àmbito didattico (Sfard, 1991; Bagni, 2001).
Il passaggio in àmbito didattico dalla fase “iniziale” alla fase “avanzata” del sapere può far nascere, nella mente degli allievi, dubbi e reazioni che si possono rintracciare nel corrispondente passaggio nella formazione del sapere.
È importante sottolineare che la fase “intuitiva ingenua” risulta in opposizione a quella “avanzata” sia nella storia della matematica che nei processi di apprendimento e insegnamento, non solo nella scuola primaria ma anche oltre, dato che i modelli permangono nella scuola superiore (Arrigo e D’Amore 1999, 2002) e, in alcuni casi, anche in seguito.
Queste considerazioni possono risultare molto utili per la *trasposizione didattica* (vedi paragrafo 2.4) che dovrebbe partire da una prima conoscenza intuitiva degli studenti, per poi far sì che le convinzioni iniziali degli allievi si indirizzino verso la fase “avanzata” del concetto stesso.

3.2 Prime domande di ricerca e relative ipotesi

Dalle considerazioni precedenti sulla trasposizione didattica emergono le prime domande di ricerca e le relative ipotesi:
- Gli insegnanti di scuola primaria conoscono e hanno consapevolezza della fase “avanzata” del concetto di infinito matematico?
- Nella trasposizione didattica gli insegnanti si basano effettivamente sui risultati raggiunti nella fase “avanzata” dello sviluppo del sapere, oppure non fanno altro che rafforzare la fase “intuitiva ingenua” degli allievi?
- D’altra parte, gli insegnanti di scuola primaria accedono mai al sapere per quanto riguarda l’infinito matematico?

La nostra ipotesi è che gli insegnanti di scuola primaria non conoscono la fase “avanzata” del concetto di infinito matematico ed è per questo che restano ancorati alla fase “intuitiva ingenua” del sapere. In questo modo non fanno altro che rafforzare le convinzioni intuitive iniziali degli allievi, senza favorire il passaggio verso la fase “avanzata” del concetto. Ossia la trasposizione didattica invece di partire dalla fase “intuitiva ingenua” degli studenti per poi

indirizzarsi verso la fase “avanzata” del concetto (quindi tenendo conto della fase “avanzata” del sapere), non fa altro che rafforzare le convinzioni ingenue degli studenti, fossilizzando e radicando così la loro fase intuitiva iniziale.
Questo atteggiamento è a nostro avviso fonte di ostacoli didattici che impediscono la comprensione del concetto di infinito matematico.

La presente ricerca era inizialmente indirizzata agli allievi dell’ultimo anno della scuola primaria con l’intento di rintracciare le prime immagini, le prime intuizioni ed eventualmente le prime difficoltà che si presentano agli studenti nell’affrontare l’infinito matematico. Da queste esperienze, che saranno trattate in modo esplicito nel capitolo seguente, si è notato come già dagli ultimi anni di scuola primaria vi siano idee intuitive su questo argomento, quasi sempre false convinzioni che molte volte sono state esplicitate con frasi del tipo: *«La maestra mi ha detto che…», «In classe abbiamo visto che…»;* atteggiamenti che ricordano il celeberrimo caso di Gaël[38] (Brousseau e Péres, 1981) che sancì definitivamente l’entrata nel mondo della didattica della matematica dell’idea di contratto didattico (vedi paragrafo 2.1).
Alcune volte, poi, gli insegnanti incuriositi per ciò che volevamo proporre ai bambini si avvicinavano per sapere di che cosa ci stavamo occupando e con estrema sincerità e professionalità mettevano in evidenza le loro false credenze su questo argomento. Per questo il nostro interesse di ricerca si è spostato sulle convinzioni degli insegnanti che ci hanno permesso di riscontrare alcuni ostacoli didattici che si presentano nel proporre il concetto di infinito matematico.

3.3 Descrizione del quadro teorico di riferimento

In contesto internazionale, tra la vastissima letteratura, facciamo qui principalmente riferimento a D’Amore (1996, 1997) che fornisce, oltre ad una ricca e ragionata panoramica delle diverse “categorie” di ricerca, una vasta bibliografia di oltre 300 titoli.

[38] Il caso di Gaël nacque per studiare le cause del fallimento elettivo in matematica; la condizione nella quale i ricercatori trovarono Gaël è descritta come segue: invece di esprimere coscientemente la propria conoscenza, Gaël la esprimeva sempre e solo in termini che coinvolgevano l’insegnante. Ogni situazione didattica veniva vissuta dal bambino attraverso l’insegnante, finché i ricercatori ottennero da lui, grazie a situazioni a-didattiche, interventi più personali e, alla fine, assai più cognitivamente produttivi.

Più in dettaglio, il nostro quadro teorico di riferimento verte principalmente sulle considerazioni e conclusioni riportate in Arrigo e D'Amore (1999, 2002), che sono risultate fondamentali come chiave di lettura dell'attuale ricerca.
In particolare, nel primo lavoro sono descritti i seguenti due fenomeni che si basano sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti (Shama e Movshovitz Hadar, 1994; Arrigo e D'Amore, 2002) e dei quali terremo conto nel presente lavoro:

- un fenomeno chiamato da Arrigo e D'Amore *"appiattimento"* che la letteratura aveva già evidenziato [Waldegg (1993), Tsamir e Tirosh (1994), Fischbein, Jehiam e Cohen (1994, 1995)] e che consiste nel ritenere tutti gli insiemi infiniti come aventi la stessa cardinalità, ossia nel ritenere che tutti gli insiemi infiniti possano essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro. Più in dettaglio, in letteratura si è mostrato come, una volta accettato da parte degli studenti che due insiemi come N e Z debbano avere la stessa cardinalità (su spinta del ricercatore o del docente che mostra la corrispondenza biunivoca tra i due insiemi), risulta molto frequente la generalizzazione che tutti gli insiemi infiniti debbano avere necessariamente la stessa cardinalità. Questa misconcezione non dipende solo da un ostacolo epistemologico, già messo in evidenza dalla storia della matematica, ma anche da ostacoli di tipo didattico come è stato rilevato in Arrigo e D'Amore (1999 e, soprattutto, 2002);

- un fenomeno chiamato dai due Autori *"dipendenza"*, in base al quale vi sono più punti in un segmento lungo, rispetto ad uno più corto (Tall, 1980). Questo fenomeno è rintracciabile non solo in àmbito geometrico, ma si parla anche di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici; ad esempio dato che l'insieme dei numeri pari rappresenta un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali, si pensa che il primo debba essere costituito da un numero minore di elementi.

Questi due atteggiamenti sono stati ripresi e rianalizzati in modo sempre più puntuale in Arrigo e D'Amore (2002), dove viene anche messo in evidenza come le difficoltà nella comprensione dell'infinito matematico siano legate al problema del modello intuitivo (Fischbein, 1985) (vedi paragrafo 2.2), che gli studenti hanno degli enti geometrici, in particolare del punto e del segmento (vedi cap. 4). Inoltre per questo lavoro di ricerca sono risultate significative le considerazioni riportate in Fischbein (1993) dove, tramite vari esempi (alcuni di questi relativi al punto), viene messa in evidenza la complessità delle relazioni tra gli aspetti figurali e concettuali nell'organizzazione dei *concetti figurali* e la fragilità di tale organizzazione nelle menti degli studenti. Per questo, dal punto di vista didattico, Fischbein sostiene che gli insegnanti dovrebbero mettere sistematicamente in evidenza agli studenti le varie situazioni conflittuali per mostrare l'importanza dominante della definizione sulla figura. Ossia, lo studente dovrebbe essere reso consapevole dei conflitti e delle loro origini, con lo scopo di enfatizzare nella sua mente la necessità per il ragionamento matematico di dipendere da vincoli formali. Inoltre sempre Fischbein (1993) sostiene che l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei vincoli concettuali su quelli figurali, non è un processo spontaneo; anzi, dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante. Perché questo avvenga, in Arrigo e D'Amore (2002) si suggerisce un intervento a monte, cioè sulla preparazione in questo specifico campo degli insegnanti della scuola di base. Quest'ultimo aspetto rappresenta un punto chiave per la presente trattazione che si basa sulle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria nei confronti dell'infinito matematico; convinzioni che influenzano il formarsi nella mente degli allievi di modelli intuitivi che producono situazioni di disagio cognitivo. Per modificare e raffinare queste convinzioni occorre un nuovo apprendimento che può avvenire solo tramite corsi di formazione che consentano di riflettere in modo specifico su questo tema (vedi paragrafo 4.1).

Un'altra problematica alla quale faremo riferimento riguarda il classico dibattito filosofico su infinito in senso attuale e in senso potenziale che ha ispirato diverse ricerche: Moreno e Waldegg (1991), Tsamir e Tirosh (1992), Shama e Movshovitz Hadar (1994), Bagni (1998, 2001), Tsamir (2000). Da queste si può rilevare come, sia dal punto di vista storico che per quanto concerne l'apprendimento del concetto di infinito matematico, l'evoluzione della concezione attuale sia molto lenta ed avvenga spesso in modo contraddittorio e solo grazie ad un processo di sistemazione e maturazione cognitiva degli apprendimenti [dal punto di vista storico basta ripercorrere le considerazioni riportate nel cap. 1].

3.4 Descrizione dei problemi

Descriviamo in modo esplicito i problemi che ci hanno spinto a questa ricerca.

P1. C’è consapevolezza tra gli insegnanti di scuola primaria su che cosa si intende per infinito matematico sia epistemologicamente che cognitivamente?

P2. Gli insegnanti forniscono modelli intuitivi ai propri allievi su questo argomento fin dai primi anni di scuola primaria? Se li forniscono, sono consapevoli che si tratta di misconcezioni che necessiteranno di sistemazione o sono convinti che si tratta dei modelli corretti che dovranno accompagnare gli studenti per tutta la loro vita scolastica futura?

P3. Le convinzioni degli insegnanti possono essere causa di ostacoli didattici che rafforzano gli ostacoli epistemologici già evidenziati dalla ricerca internazionale?

3.5 Ipotesi della ricerca

Riportiamo le ipotesi relative ai problemi descritti nel paragrafo 3.4:
I.1. A nostro avviso, per la maggior parte degli insegnanti di scuola primaria l’infinito matematico rappresenta un argomento sconosciuto, sia in senso epistemologico che cognitivo, di conseguenza pensavamo che gli insegnanti non fossero in grado di maneggiare l’infinito e non riuscissero a concepirlo come oggetto matematico. Per questo ipotizzavamo che gli insegnanti restassero ancorati a convinzioni ingenue del tipo che l’infinito non è altro che l’indefinito, o che l’infinito è sinonimo di illimitato, o ancora che l’infinito non è altro che un numero finito molto grande [convinzioni che possiamo ritrovare presenti per diversi secoli nella storia di questo argomento, vedi cap. 1; in particolare si possono rintracciare nelle affermazioni di Nicolò da Cues (1400 o 1401-1464)].

I.2. A nostro avviso, gli insegnanti di scuola primaria forniscono modelli intuitivi agli allievi sull’infinito matematico fin dai primi anni di scuola primaria.
Inoltre se le convinzioni ingenue degli insegnanti ipotizzate in I.1. si fossero rilevate, a nostro avviso queste convinzioni avrebbero condizionato i modelli che vengono forniti agli studenti. Ipotizzavamo che i modelli intuivi forniti, che rappresentano in realtà misconcezioni, fossero invece considerati dagli insegnanti come modelli corretti. Per verificare questa ipotesi, ritenevamo molto interessante esaminare attentamente le affermazioni e le modalità delle espressioni degli insegnanti.

I.3. A nostro avviso, se le nostre due prime ipotesi si fossero verificate, ipotizzavamo che, oltre agli ostacoli epistemologici che lo studio della storia e la critica dei fondamenti hanno evidenziato, saremmo riusciti a riscontrare anche ostacoli di natura didattica. Uno, che pensavamo di trovare, è legato all'idea ingenua di infinito come sinonimo di illimitato, convinzione che contrasta l'infinità dei punti in un segmento, dato che un segmento pur essendo limitato è costituito da infiniti punti; un altro è legato all'idea di infinito come numero naturale grande [vedi cap. 1; in particolare: Anassimandro di Mileto (¯610-¯547) e Nicolò da Cues (1400 o 1401-1464)] che porta di conseguenza a trasferire le stesse procedure degli insiemi finiti agli insiemi infiniti, considerati appunto come insiemi finiti molto grandi. Un altro ostacolo didattico, già più volte evidenziato da Arrigo e D'Amore (1999, 2002) e che eravamo sicuri di rintracciare, è quello chiamato dai due Autori "modello della collana" che viene indicato spesso dagli studenti come modello adatto per rappresentarsi mentalmente i punti sulla retta e che è stato a volte evidenziato dagli alunni come modello fornito dai loro insegnanti di scuola primaria, modello che resiste ad ogni attacco successivo (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002). La nostra ipotesi dunque era che avremmo trovato ostacoli didattici derivanti da modelli tipici che vengono usualmente proposti dagli insegnanti di scuola primaria.
Se le ipotesi qui evidenziate si fossero verificate, ci saremmo spinti a prendere in esame la possibilità e la necessità di rivedere i contenuti a carattere disciplinare da proporre nei corsi di formazione degli insegnanti di scuola primaria; non tanto perché gli insegnanti modifichino i contenuti della loro azione didattica, quanto perché evitino il formarsi di quei modelli intuitivi che possono produrre situazioni di disagio cognitivo ai propri allievi.

3.6 Metodologia della ricerca

3.6.1 Insegnanti sui quali si è effettuata la ricerca e metodo di svolgimento

Dopo che l'attenzione di questa ricerca si è concentrata sulle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria, si è pensato di proporre un questionario che servisse come base di partenza per far riflettere e per far nascere uno scambio di opinioni tra gli insegnanti sulle problematiche relative all'infinito matematico. In questo modo si è cercato di far emergere le loro convinzioni, i loro misconcetti ed i loro modelli intuitivi nei confronti di questo tema.

Per la messa a punto del questionario si sono realizzati diversi colloqui informali con vari insegnanti, necessari per la leggibilità e la comprensibilità del testo; le domande che venivano poste rientravano tra i concetti che vengono generalmente trattati alla scuola primaria e che creano nella mente degli allievi, talvolta senza consapevolezza degli insegnanti, le prime immagini che si trasformano in modelli intuitivi degli enti geometrici e più in generale della tematica dell'infinito.

Il questionario e il successivo scambio di opinioni si è proposto a 16 insegnanti italiani di scuola primaria, diversi da quelli interpellati nella parte iniziale (4 di Venezia, 8 di Forlì, 4 di Bologna).

La ricerca è stata realizzata con le seguenti modalità: si sono organizzati sei incontri dove nei primi quattro erano presenti per ciascuno due insegnanti, mentre per gli altri due incontri erano presenti quattro insegnanti ogni volta (per un totale di 16 insegnanti). Per ogni incontro inizialmente si è somministrato ad ogni insegnante il questionario da leggere e completare individualmente e, dopo che ciascuno lo aveva consegnato, si avviava la discussione che quindi avveniva a coppie o tra quattro persone. Durante il confronto, gli insegnanti esprimevano le proprie convinzioni, i dubbi e le perplessità in presenza del ricercatore che interveniva solo in determinati punti della conversazione per sollecitare alcuni aspetti rilevanti della tematica, tenendo sempre ben presente la necessità di non modificare le convinzioni ingenue degli insegnanti. I gruppi per la discussione venivano creati sempre in modo da mettere a confronto insegnanti ben affiatati, abituati al dialogo e ad uno scambio di opinioni.

In tutte le occasioni si era ampiamente chiarito che si trattava di un lavoro di ricerca nel quale non sarebbero apparsi i loro nomi.

Il questionario è stato riconosciuto come facilmente "comprensibile" dagli insegnanti. In effetti dopo una prima lettura delle domande, tutti hanno affermato che era di semplice interpretazione; eppure quando si trattava di rispondere alla prima domanda, 13 insegnanti hanno manifestato un forte disagio del tipo: *«Non so che cosa scrivere, non ho mai riflettuto su questo argomento»*. Solo dopo qualche affermazione di auto-rassicurazione del tipo: *«Io scrivo quello che mi viene in mente, anche se non sarà proprio detto bene»*, iniziavano a rispondere alla prima domanda.

Per lo svolgimento del questionario si è lasciata un'ora di tempo, per permettere agli insegnanti di leggere, riflettere, ripensare e decidere con calma che cosa rispondere. Nessun insegnante ha utilizzato tutto il tempo a disposizione.

Per la seconda parte, basata sul confronto e sul dialogo, non vi erano limiti di tempo; la tecnica utilizzata è stata quella della discussione attiva in gruppi di diversa consistenza

numerica, facendo uso del registratore e lasciando al ricercatore il compito di mettere in evidenza contraddizioni e modelli intuitivi radicati.
Quest'ultima fase di discussione è risultata determinante e più significativa; in effetti già dalle interviste iniziali si è notato come un test scritto non possa far emergere i veri modelli intuitivi degli insegnanti dato che una singola risposta, molto spesso sintetica, non permette di interpretare le reali convinzioni. Soprattutto per un argomento così complesso e sofisticato, si è reso necessario indagare in profondità sulle singole convinzioni degli insegnanti, sfruttando lo scambio di opinioni che ha permesso di ripercorrere le risposte date al questionario per saggiarne il senso reale, per verificarne la stabilità e per evidenziare eventuali contraddizioni.
La scelta di far nascere confronti tra gli insegnanti, più che tra un singolo insegnante e il ricercatore, verte sull'esigenza di far emergere le vere convinzioni. In effetti quando ad un insegnante viene richiesto di esprimere o difendere la propria opinione con un collega con il quale è abituato ad argomentare e che ha più o meno le stesse conoscenze sull'argomento proposto, ci si aspetta che si senta più libero di manifestare la propria opinione.
In questo modo si è cercato di ridurre alcuni atteggiamenti da parte degli insegnanti, del tipo: "fiducia nel ricercatore" o "fiducia in ciò che sostengono i matematici" [già più volte evidenziati dalla letteratura, si veda ad esempio: Perret Clermont, Schubauer Leoni e Trognon (1992)], che si manifestano non solo quando la ricerca viene rivolta agli studenti, ma anche quando si rivolge agli insegnanti.
In questa sede non daremo la documentazione completa di questi confronti ma ci serviremo solamente delle frasi più significative e ricorrenti enunciate dagli insegnanti. I questionari e le complete registrazioni sono comunque a disposizione presso l'autrice di chiunque voglia approfondire questa tematica di ricerca.

3.6.2 Contenuto del questionario

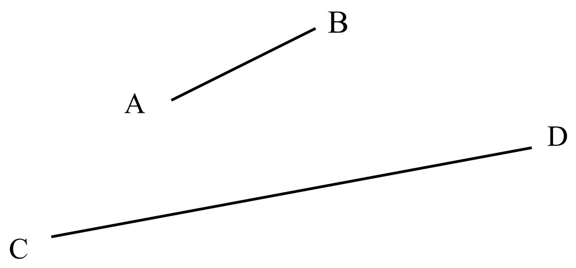
Il questionario era costituito da 15 fogli formato A4 in ognuno dei quali era presente una sola domanda (la rimanente parte bianca del foglio era lasciata vuota per consentire agli insegnanti di scrivere la risposta).
Qui di seguito riportiamo le 15 domande e la spiegazione della metodologia adottata per lo svolgimento del questionario:

1) Che cosa pensi che significhi infinito matematico?

2) Durante l'insegnamento nei cinque anni di scuola primaria ti è mai capitato di parlare di infinito? Quando? In che senso? In che modo? Sfruttando quali materiali?

3) Il termine "infinito" in matematica esiste sia come aggettivo che come sostantivo?

4) Ci sono più punti nel segmento AB o nel segmento CD? (Scrivi nel foglio tutto ciò che ti ha fatto venire in mente questa domanda).



5) Quanti sono i numeri pari: 0, 2, 4, 6, 8, …?

6) Quanti sono i numeri dispari: 1, 3, 5, 7…?

7) Quanti sono i numeri naturali: 0, 1, 2, 3…?

8) Quanti sono i multipli di 15?

9) Sono di più i numeri pari o i numeri dispari?

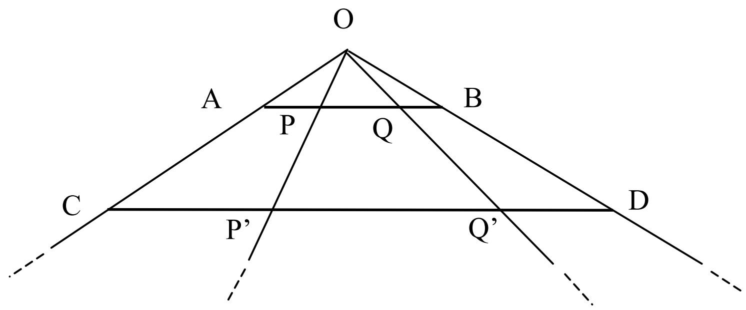
10) Sono di più i numeri pari o i numeri naturali?

11) Sono di più i numeri dispari o i numeri naturali?

12) Sono di più i multipli di 15 o i numeri naturali?

13) Ti è mai capitato durante l'insegnamento nella scuola primaria di confrontare le quantità di questi insiemi numerici (pari con dispari, pari con naturali, dispari con naturali)? In che modo? E in quale circostanza?

Dopo che era stato consegnato il plico con le prime 13 risposte, si proponeva la dimostrazione di Georg Cantor (1845-1918) (vedi paragrafo 1.2.3) relativa alla domanda n. 4 che mostra come vi sia lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse. Per realizzarla, si mostrava la corrispondenza biunivoca su un foglio di carta dove si erano già predisposti i segmenti AB e CD (spostati nel piano rispetto alla domanda n. 4, mediante isometrie, in modo da essere paralleli e "centrati" l'uno rispetto all'altro). Inizialmente si disegnava, aiutati da un righello, il punto O di intersezione delle rette AC e BD; successivamente da O si proiettavano i punti del segmento AB sul segmento CD e viceversa, mostrando così la corrispondenza biunivoca tra gli insiemi di punti dei segmenti AB e CD. Tramite questa costruzione, si faceva notare come vi sia lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse.



Successivamente si consegnava ad ogni insegnante un foglio nel quale era scritta la seguente domanda:

14) Con la massima sincerità rispondi alla seguente domanda: ti ha convinto la dimostrazione che ci sono tanti punti in AB quanti in CD?

Dopo che era stato consegnato il foglio con la risposta n. 14, si proponeva la dimostrazione, relativa alla domanda n. 10, che mette in evidenza come l'insieme dei numeri pari (P) sia formato dallo stesso numero di elementi dell'insieme dei numeri naturali (N), facendo vedere la relativa corrispondenza biunivoca (Tall, 2001a, pag. 213-216).
Illustriamo la corrispondenza biunivoca mostrata agli insegnanti:

N	0	1	2	3	4	5	…	n	…
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
P	0	2	4	6	8	10	…	2n	…

Questa idea ha come origine la considerazione che fece Galileo Galilei (1564-1642) (anche se Galilei parlava di numeri quadrati e non di numeri pari) (vedi paragrafo 1.1.2): ad ogni numero naturale corrisponde un ben preciso quadrato e, viceversa, ad ogni numero quadrato corrisponde un ben preciso naturale (la sua «radice aritmetica»); dunque ci sono tanti numeri naturali quanti quadrati.

Come per la domanda precedente, si era fornito ad ogni insegnante un foglio con la seguente domanda:

15) Con la massima sincerità rispondi alla seguente domanda: ti ha convinto la dimostrazione che ci sono tanti numeri nell'insieme dei pari quanti nell'insieme dei numeri naturali?

Solo dopo che ogni insegnante aveva consegnato tutti i fogli si iniziava il confronto e lo scambio di opinioni tra due o quattro insegnanti.

Vista la natura della ricerca e soprattutto le competenze dei soggetti esaminati su questo tema, non si è ritenuto necessario stabilire un ordine nelle domande che desse preliminarità al discreto rispetto al continuo; di fatto, solo la domanda numero 4 è decisamente inseribile nel filone "continuo".

3.7 Descrizione dei risultati del test e degli scambi di opinioni e verifica delle ipotesi formulate in 3.5

Dalle risposte alle domande del questionario, sono emerse affermazioni piuttosto generiche che sono state approfondite solo grazie agli scambi di opinioni tra gli insegnanti. Qui di seguito riportiamo alcune tra le risposte fornite ad ogni domanda del questionario, integrate con le affermazioni effettuate durante la discussione successiva. La scelta delle risposte ha come finalità quella di far percepire l'intera panoramica delle convinzioni degli insegnanti interpellati. In neretto si sono indicati gli interventi effettuati dal ricercatore durante la discussione, per sollecitare la conversazione e per indagare più in profondità sulle convinzioni degli insegnanti.

3.7.1 Descrizione dei risultati del test e dei relativi scambi di opinioni

1) Per quanto riguarda le risposte alla prima domanda del questionario, tutte rientrano tra le convinzioni riportate di seguito; si può notare come nessuno dei 16 insegnanti intervistati fosse a conoscenza della concezione "avanzata" dell'infinito matematico. Riteniamo importante precisare che la classificazione scelta, non è certamente definitiva; in effetti, come vedremo di seguito, alcune affermazioni degli insegnanti che inizialmente erano state inserite in una determinata categoria, sono poi rientrate anche in altre categorie come conseguenza della conversazione successiva.

• ***Infinito come indefinito.*** 7 insegnanti tendono a considerare l'infinito come indefinito, nel senso che non si sa quanto sia, che cosa sia, che cosa rappresenti.

.R.: «Per me vuol dire senza confini, senza margini come lo spazio»

R.: «Cioè nel senso di indefinito?»

R: «Sì, senza il contorno»

C.: «Qualcosa che non si riesce a dire»

R.: «In che senso?»

C.: «Che non si sa quanto sia»

A.: «Ciò che non si può tradurre per iscritto»

• ***Infinito come numero finito grande.*** Altri 3 insegnanti sostengono che l'infinito non è altro che un numero finito grande.

A.: «Per me è un numero grande, talmente grande che non si può dire esattamente il suo valore»

B.: «Dopo un po', quando ci si stanca di contare si dice infinito per dire che è un numero sempre più grande»

• ***Infinito come illimitato.*** 5 insegnanti confondono l'infinito con l'illimitato, ritenendo che il termine infinito sia attribuibile solamente alla retta, alla semiretta, al piano, ossia a tutto ciò che è illimitato, mentre non si può parlare di infinito ad esempio nei punti del segmento, essendo limitato. Interessante è notare che se il ricercatore interviene ponendo la domanda: *«Quanti punti ci sono in un segmento?»*, gli insegnanti mostrano di sapere che la risposta a questa domanda è: *«Infiniti»*, ma senza percepire il senso e il significato reale di questa affermazione. In effetti, indagando in profondità, 3 dei 5 insegnanti sostengono che nel caso del numero di punti in un segmento, l'infinito è considerato come un numero finito grande del quale non si conosce il valore preciso, mentre gli altri 2 insegnanti si ricollegano all'idea di infinito come indefinito: non si sa esattamente quanto sia; rientrando così tutte e 5 nelle altre categorie evidenziate per questa domanda. Per questi insegnanti, sembra che valga la seguente relazione: se si parla di linee, di piani e di spazio risultano sinonimi infinito e illimitato, mentre nel caso della quantità dei numeri o dei punti, si parla di infinito nel senso di numero finito molto grande o di indefinito.

A.: «Senza un limite»

M.: «Ciò che quantitativamente non misuro»

(Anche in questo caso l'insegnante M. associa il termine infinito all'illimitato, senza pensare ad esempio al segmento che pur essendo limitato e misurabile, nel senso inteso da M., contiene infiniti punti).

N.: «Qualcosa di illimitato»

R.: «Quindi nel segmento non useresti mai la parola infinito?»

N.: «No, perché ha un inizio e una fine»

R.: «Secondo te quanti punti ci sono in un segmento?»

N.: «Ah, è vero, sono infiniti. Ma per dire un numero grande, ma non grandissimo come nella retta. Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno»

[L'insegnante N. evidenzia già la convinzione che ritroveremo tra le risposte alla domanda n. 4, che vi sono più punti in una retta piuttosto che in un segmento, mettendo così in risalto l'idea che a maggior lunghezza corrisponde un maggior numero di punti; i punti, dunque, non sono concepiti come enti astratti, ma come oggetti che per poter essere rappresentati, devono avere una certa dimensione (vedi cap. 4). Queste misconcezioni derivano dai modelli che hanno gli insegnanti degli enti geometrici fondamentali come il punto, la retta e il segmento].

G.: «Illimitato»

R.: «Secondo te quanti punti ci sono in un segmento?»

G.: «In un segmento si dice che ci sono infiniti punti perché non si sa quanti sono esattamente».

• ***Infinito come procedimento.*** Solo un insegnante parla di infinito come risposta alla prima domanda, riferendosi ad un procedimento senza fine:

B.: «L'infinito lo conosco, significa continuare ad andare avanti come con i numeri… per sempre».

Questa convinzione si collega all'idea di infinito potenziale che sarà presentata nel paragrafo 3.7.3. Analizzando le risposte più in profondità si può osservare che anche nell'affermazione qui sopra riportata di B., che rientra nella categoria di infinito come numero finito grande o in altre risposte che ritroveremo successivamente, si rintraccia la convinzione degli insegnanti di infinito potenziale inteso come procedimento che continua per sempre.

2) Le risposte relative alla seconda domanda evidenziano come, per tutti gli insegnanti interpellati, si parli di infinito in diverse forme fin dai primi anni di scuola primaria, creando così immagini di ciò che si intende con questo termine. I 16 insegnanti hanno infatti affermato che nella scuola primaria citano e affrontano il concetto di infinito.

A.: «Riferito al numero, faccio vedere la linea dei numeri e dico che non finiscono mai. E parlando di infinito faccio vedere la differenza fra segmento, semiretta e retta».

Ancora una volta ritorna la convinzione di infinito come illimitato. In effetti era la stessa insegnante che sosteneva che infinito significa senza almeno un limite, per questo afferma esplicitamente che: *«Si può parlare di infinito solo nella semiretta e nella retta, ma non nel segmento»*, essendo il segmento limitato.

G.: «Ne parlo, quando facciamo i numeri. Dico sempre che sono infiniti»

A.: «Dico in terza elementare che la retta è infinita evocando immagini mentali che diano l'idea di infinito come il raggio laser»

M.: «Io lo uso anche per le parti che posso fare da una quantità, posso continuare a dividere sempre una stessa quantità».

Queste sono solo alcune delle affermazioni degli insegnanti interpellati, che mostrano come il termine infinito sia da loro citato e spiegato fin dai primi anni di scuola primaria, seppur senza correttezza e consapevolezza del significato dal punto di vista matematico.

3) La terza domanda è stata posta per indagare se tra gli insegnanti vi fosse la consapevolezza del fatto che l'infinito rappresenta un oggetto matematico (Moreno e Waldegg, 1991).

Per 13 insegnanti si parla di infinito in matematica solo come aggettivo, mentre per gli altri 3 insegnanti anche come sostantivo; ma di questi 3 insegnanti, 2 concepiscono l'infinito nel senso di indefinito, mentre l'altro insegnante sostiene che si può usare questa parola anche come sostantivo, ma nel senso di un numero finito veramente grande del quale non si conosce il valore.

N.: «Come aggettivo»

M.: «In matematica esiste solo come aggettivo, nella lingua italiana anche come sostantivo»

A.: *«Come aggettivo si usa in matematica: numeri infiniti; spazio infinito.*
Come sostantivo in italiano: "L'Infinito" di Leopardi; "Vedo l'infinito"; "Mi perdo nell'infinito"»

B.: *«Anche come sostantivo, per dire un numero grande»*

4) La quarta domanda verteva sulla presunta convinzione degli insegnanti che a diversa lunghezza dei segmenti debba corrispondere un diverso numero di punti; idea già emersa dalla risposta alla prima domanda effettuata da parte dell'insegnante N., riportata nel punto 1) di questo paragrafo.

Tutti e 16 gli insegnanti intervistati hanno affermato che in due segmenti di lunghezze diverse vi sono numeri differenti di punti, in particolare che a maggior lunghezza corrisponde un maggior numero di punti (Fischbein, 2001). È ovvio che, come immagine visiva, un segmento sembra essere incluso nell'altro, quindi vi è una grande influenza del modello figurale che in questo caso condiziona negativamente la risposta; in effetti per l'infinito non vale la nozione euclidea: *«Il tutto è maggiore della sua parte»* (vedi paragrafo 1.1.1).

Di seguito riportiamo alcune risposte che rientrano nella convinzione sopra menzionata:

N.: *«Mi fa venire in mente che la lunghezza diversa di due segmenti pregiudica più o meno punti nel segmento»*

B.: *«Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore»*

G.: *«In AB ce ne saranno tanti, in CD tantissimi»*

A.: *«Non ne sono sicura. Dato che un segmento può essere considerato una serie di punti allineati, penso che CD contenga più punti di AB, anche se ho studiato che il punto è un ente geometrico che essendo astratto non è quantificabile, perché non misurabile. Comunque direi in CD»*

[Si nota un'incoerenza tra ciò che l'insegnante A. afferma di aver studiato per preparare un esame di Analisi all'Università e ciò che pensa sia più ragionevole; ancora una volta il modello intuitivo dimostra la sua persistenza e predomina. In questa situazione è lampante come non vi sia coincidenza tra significato formale e significato intuitivo (Fischbein, 1985, 1992; D'Amore, 1999)].

Questa accettazione intuitiva, che rappresenta un misconcetto assai diffuso, è già stata menzionata nel paragrafo 3.3 ed è detta *dipendenza* dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure (l'insieme di misura maggiore, ha più elementi); l'insegnante è quindi convinto che: maggiore lunghezza implica maggiore cardinalità dell'insieme di punti. Ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni

di Università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come "collana di perle" (Tall, 1980; Gimenez, 1990; Romero i Chesa e Azcárate Giménez, 1994; Arrigo e D'Amore, 1999, 2002).
Questo misconcetto riapparirà tra le risposte alle domande n. 10-11-12, dove la *dipendenza* viene intesa come *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici.

La convinzione qui sopra evidenziata (che in un segmento più *lungo* vi siano più punti che non in un segmento più *corto*), come abbiamo rilevato nel cap. 1, nonostante varie ma sporadiche ricadute, è stata definitivamente debellata solo nel XIX secolo, dunque piuttosto recentemente. Ancora una volta la storia della matematica è testimone della presenza di un ostacolo epistemologico che, come è messo in evidenza in varie ricerche (Tall, 1980; Arrigo e D'Amore, 1999), rappresenta una misconcezione che comunque fa parte della mentalità comune al di fuori del mondo matematico, quindi si rintraccia anche tra le convinzioni degli insegnanti che non hanno avuto l'occasione di riflettere sulla concezione "avanzata" di questo argomento.
In effetti, l'ostacolo epistemologico inteso nel senso classico alla Brousseau (1983) (vedi paragrafo 2.5), sappiamo essere una conoscenza stabile che funziona bene in àmbiti precedenti, ma che crea problemi ed errori al momento in cui si cerca di adattarla a nuove situazioni (disconoscenza o *modello parassita*). Inoltre come affermano Arrigo e D'Amore (1999): «*… per superare tale ostacolo occorre un nuovo apprendimento*», che però in molti casi non è avvenuto durante il percorso scolastico e che non viene neppure favorito dalla formazione successiva.
Eppure, è difficile immaginare che un insegnante che non abbia mai avuto modo di riflettere su questi argomenti possa avere un'immagine della topologia dell'insieme dei punti della retta (quindi almeno della loro densità) che gli permetta di capire ad esempio il caso specifico dei due segmenti di lunghezza diversa. Perché queste convinzioni non siano la base di modelli scorretti che creino ostacoli didattici che amplificano l'ostacolo epistemologico già evidenziato, occorre aiutare il soggetto a staccarsi dal modello del segmento come "collana", per creare immagini più opportune che consentano di concepire punti senza spessore (vedi cap. 4). Per far questo, il soggetto deve poter varcare il confine della propria conoscenza precedente, per costruire una nuova conoscenza; ma questo è possibile solo facendogli studiare i relativi teoremi su questi argomenti.
5) – 6) – 7) – 8) Per le quattro domande successive, 15 insegnanti rispondono dicendo: «*Infiniti*», tranne un insegnante che dopo vari dubbi scrive: «*Un bel po'!*», spinto dal timore

di sbagliare. Risulta assai diffuso in matematica, l'atteggiamento di rispondere con frasi che si sono apprese mnemonicamente, seppur senza consapevolezza o senza un reale sentore di ciò che possano significare secondo la concezione "avanzata" del concetto (vedi paragrafo 4.1). Tutti ricordano che questi insiemi sono infiniti, ma non sanno che cosa significhi questa affermazione; quasi tutti ricordano di aver studiato che il punto ha dimensione zero, ma non sanno che cosa possa significare, dato che in molti predomina il modello intuitivo di punto come tratto lasciato dalla punta della matita.

9) A partire da questa domanda e per quattro domande consecutive si è chiesto di confrontare le cardinalità di alcuni insiemi infiniti che di solito vengono presentati nella scuola primaria. Le risposte a questa domanda rientrano nelle seguenti tre categorie:

• ***Vi sono tanti numeri pari quanti dispari.*** 12 insegnanti su 16 sostengono questa ipotesi.
C.: «Per me sono lo stesso numero»

• ***Non si può fare il confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti.*** 3 insegnanti non riescono a concepire un confronto delle cardinalità di insiemi infiniti. In effetti nella logica di chi concepisce l'infinito o come indefinito o come un qualcosa di finito, molto grande, ma indeterminato come valore, risulta impossibile fare un confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti.
R.: «Non si può rispondere, non si può fare un confronto per gli infiniti»

• ***Gli incerti.*** Un insegnante risponde con una domanda:
A.: «Direi che hanno la stessa quantità, i numeri pari e i numeri dispari; ma ho un grande dubbio: se sono infiniti come faccio a quantificarli?»
(Da questa risposta si percepisce l'infinito inteso come indefinito).

10) – 11) – 12) Le risposte date a queste tre domande rientrano nelle seguenti quattro categorie; i 16 insegnanti intervistati rimangono tutti coerenti, rispondendo sempre allo stesso modo a tutte e tre le domande:

• ***Sono di più i numeri naturali.*** 10 insegnanti rispondono che sono di più i numeri naturali, sostenendo così la nozione comune euclidea: *«Il tutto è maggiore della sua parte»*.

C.: «I numeri naturali»

• ***Non si può fare il confronto tra insiemi infiniti.*** Gli stessi 3 insegnanti che nella risposta n. 9 non concepivano un confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti, continuano a pensare nello stesso modo; questo deriva dall'idea che si possa parlare di cardinalità solo al finito:
R.: «Non si può rispondere, non si può fare un confronto».

• ***Gli incerti.*** Lo stesso insegnante che alla domanda n. 9 risponde con una domanda, continua a rispondere nello stesso modo, mostrando così di essere coerente:
A.: «Direi i numeri naturali, ma come faccio a quantificarli? Dire infinito non vuol dire niente».

• ***Sono tutti insiemi infiniti.*** 2 insegnanti sostengono che tutti gli insiemi considerati sono infiniti e quindi che hanno tutti la stessa cardinalità.
B.: «Sono entrambi infiniti. Se due insiemi sono infiniti, sono infiniti e basta».
Dall'intervista a questi due insegnanti si evidenzia il misconcetto di *appiattimento* dei cardinali transfiniti, presentato nel paragrafo 3.3, che consiste nel ritenere che tutti gli insieme infiniti sono tra loro equipotenti. Ossia a questi insegnanti è venuto spontaneo pensare che essendo tutti gli insiemi citati infiniti, si possa concludere, in accordo con un passo di Galileo, che l'aggettivo "maggiore" non si possa utilizzare parlando di infinità (vedi paragrafo 1.1.2.); da ciò si trae la conseguenza che tutti gli insiemi di questo tipo sono null'altro che, banalmente, infinito.
R.: «Quindi per te, tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità?»
B.: «Cioè? Lo stesso numero? Sì, se sono infiniti!».

13) Questa domanda era stata posta per riuscire ad evidenziare se qualche insegnante, durante l'attività didattica in classe, proponeva esperienze di confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti. Tutti e 16 gli insegnanti rispondono che non hanno mai proposto attività specifiche su questo tema, ma 3 insegnanti nella discussione successiva affermano che è possibile che nel parlare di questi insiemi ai propri allievi possano aver detto in modo ingenuo che vi sono più numeri naturali che numeri pari. Affermazione che rappresenta di certo un ostacolo didattico al futuro apprendimento degli studenti.

14) Per testare il grado di convincimento relativo alle affermazioni fornite dagli insegnanti sull'idea di punto e di segmento, soprattutto riguardanti la domanda n. 4, si è proposta la costruzione descritta nel paragrafo 3.6.2 che mostra come vi sia lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse. Successivamente si è consegnata la domanda n. 14.
Le risposte a questa domanda rientrano tra i seguenti tipi:

• ***Non convinti della dimostrazione.*** Dei 16 insegnanti intervistati, 5 non sono convinti della dimostrazione:

R.: «Vi ha convinto questa dimostrazione?»

M.: «A me mica tanto; per me un punto è un punto, anche se lo faccio più piccolo è pur sempre un punto. Guarda! (e lo segna sul foglio). *Quindi se li faccio grandi uguali, come fanno ad essercene lo stesso numero?»*

R.: «Secondo te tra due punti ce n'è sempre un altro?»

M.: «No, se sono i due punti subito attaccati; se li disegno attaccati attaccati, al massimo dell'attaccato, vedrai che non ce ne sta un altro»

B.: «Mmmh! Ma nel segmento AB ripassi per lo stesso punto quando le linee diventano più fitte. Non mi convince».

Per gli insegnanti che hanno mostrato di percepire il punto non come un ente astratto privo di dimensione, ma come un segno della matita avente una data dimensione, risulta veramente difficile cogliere il senso di questa costruzione. In generale, chi la rifiuta lo fa principalmente perché immagina il segmento secondo il "modello della collana".

• ***Convinti della dimostrazione.*** 9 insegnanti affermano di essersi convinti grazie alla dimostrazione che per alcuni, come A. e C., sembra veramente efficace e lampante:

A.: «Che bella!, mi hai convinta»

C.: «A me hai convinto, è proprio così»

G.: «Sì, sono convinta».

A questi 9 insegnanti che si sono mostrati subito sicuri della correttezza della dimostrazione, abbiamo voluto far apparire qualche perplessità per mezzo di una domanda dubbiosa del tipo: *«Ma siete proprio certi?»*. L'intento era di osservare se gli insegnanti erano disposti a cambiare idea, rivelando così una non reale convinzione. In effetti, 3 di loro mostrano di non essere del tutto convinti, tornando alla affermazione di partenza, ossia che ci sono più punti in CD [si vedano sul cambio di opinione: Arrigo e D'Amore (1999, 2002)].

R.: «Ma siete proprio certi?»

G.: «No, no!, io rimango convinta che in CD ce ne sono di più, si vede»
R.: «Non sono proprio sicura».

• ***Fiducia nei matematici.*** Per un insegnante si percepisce una sorta di "fiducia nei matematici", ma non una vera convinzione della dimostrazione:
A.: «Se lo dite voi matematici, ci fidiamo. Io di certo non mi faccio questi problemi!».

• ***Incerti.*** Un insegnante mostra la necessità di avere qualche chiarimento, ma dopo un veloce confronto afferma di essere convinto:
M.: «È perché hai preso quel punto lì, ma se ne prendevi un altro non tornava… guarda!»
(L'insegnante disegna un punto diverso da quello di proiezione da noi individuato e manda delle linee che intersecano il segmento più lungo ma non il più corto. Da queste considerazioni emergono difficoltà di capire che cos'è e come funziona una dimostrazione in matematica).
R.: «Sì, ma se proprio vuoi che il punto di proiezione sia quel punto che hai segnato, puoi fare una traslazione dei due segmenti e proiettare proprio da quel punto (si è effettuata la traslazione sul disegno di M.)***, d'altronde la traslazione non altera il numero di punti dei due segmenti»***
M.: «Va beh, mi hai convinto».

15) Ai 16 insegnanti si è poi mostrata la corrispondenza biunivoca che permette di stabilire che la cardinalità dei numeri pari è la stessa dei numeri naturali e si è poi posta la domanda n. 15.
A questa sollecitazione gli insegnanti rispondono nei seguenti due modi:

• ***Rimangono dubbiosi.*** 6 insegnanti si mostrano poco convinti:
M.: «Mi sembra un po' una forzatura»
N.: «Che strano, nei pari mancano tutti i dispari per ottenere i naturali».

• ***Si dicono convinti.*** 10 insegnanti sostengono di essere convinti, ma in 2 appare soprattutto la fiducia del ricercatore come depositario del Sapere.
Inoltre, dai colloqui emerge che tutti questi insegnanti che hanno accettato che alcuni insiemi infiniti sono tra loro equipotenti (come i numeri pari e i naturali), pensano che ciò sia legato

all’infinità, generalizzando così che tutti gli insiemi infiniti lo siano. Questa misconcezione di *appiattimento*, appare come un “miglioramento” rispetto alla misconcezione di *dipendenza* della cardinalità dalla “grandezza” dell’insieme; questo cambiamento di atteggiamento sembra una lenta e graduale scalata verso un “modello corretto avanzato di infinito”. La presenza del misconcetto *appiattimento* dei cardinali transfiniti, era comunque piuttosto prevedibile dato che gli insegnanti di scuola primaria non conoscono l’insieme dei numeri reali e quindi non possono far altro che generalizzare ciò che hanno appreso per gli insiemi che conoscono.

A questo proposito riportiamo la seguente conversazione:

A.: «Quindi tutti gli insiemi infiniti sono uguali»

R.: «In che senso? Anche gli interi hanno la stessa cardinalità dei naturali?»

A.: «Beh, sì».

R.: «E i razionali? Le frazioni»

A.: «Per me sì»

R.: «E i reali? Le radici»

A.: «Sì, tutti, tutti o sono tutti uguali, cioè infiniti, o non lo sono nessuno».

In generale con le dimostrazioni proposte, abbiamo mostrato agli insegnanti che la proprietà che già Euclide assunse come primitiva: «*Il tutto maggiore di ogni sua parte*» non vale per gli insiemi infiniti: né in àmbito geometrico [vedi le dimostrazioni di: Ruggero Bacone (1214-1292), Galileo Galilei (1564-1642), Evangelista Torricelli (1608-1647) e Georg Cantor (1845-1918)], né per insiemi numerici infiniti di cui uno è sottoinsieme proprio dell’altro [vedi le dimostrazioni di: Galileo Galilei (1564-1642) e Georg Cantor (1845-1918)].

Nelle accettazioni intuitive (misconcetti) degli insegnanti, balzano agli occhi diverse incoerenze come l’*appiattimento* e la *dipendenza* che convivono nella mente degli stessi insegnanti pur essendo in contraddizione tra loro. Si nota, in effetti, una generalizzata difficoltà degli insegnanti di rendersi conto della contraddizione di due affermazioni il che avviene a nostro avviso come conseguenza della non conoscenza e padronanza dell’infinito matematico.

Va inoltre notato che le discussioni tra insegnanti non hanno portato a modificare in qualcuno di loro l’opinione che avevano su una certa problematica dell’infinito. Solo in seguito alla proposta da parte del ricercatore delle due dimostrazioni, un certo numero di insegnanti ha cambiato opinione; mentre si è potuta notare una diffusa resistenza degli insegnanti a cambiare idea a causa delle sollecitazioni di un collega.

3.7.2 L'idea di punto

In molte affermazioni degli insegnanti, soprattutto tra le risposte alla domanda n. 4 del questionario (paragrafo 3.6.2) basata sul misconcetto che a diversa lunghezza dei segmenti debba corrispondere un diverso numero di punti, sono emerse convinzioni legate all'idea di punto come ente avente una certa dimensione, anche se molto piccola. Convinzione derivante dalla rappresentazione che viene comunemente fornita del punto e che condiziona l'immagine che si ha di questo oggetto matematico. In realtà, anche chi non esplicita direttamente questa misconcezione, ma risponde alla domanda n. 4 sostenendo che in un segmento più lungo vi sono più punti rispetto ad un segmento più corto, mette in evidenza una "ingenua" interpretazione di ciò che si intende per segmento e per punto.

Riportiamo di seguito alcune affermazioni relative alla domanda n. 4:

B.: «Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore»

S.: «Quanti in più?»

B.: «Dipende quanto li fai grandi»

M.: «Anche da come li fai larghi o attaccati; ma se li avvicini al massimo e li fai grandi uguali ce ne sono di più in CD»

G.: «In CD, è più lungo»

S.: «Ma tu li vedi raffigurati i punti qui sopra?»

G.: «Sì, è la geometria che facciamo che tende a farceli vedere i punti».

Di seguito riportiamo l'affermazione già menzionata nel paragrafo 3.7.1 relativa alla domanda n. 1:

N.: «Ah, è vero, sono infiniti. Ma per dire un numero grande, ma non grandissimo come nella retta. Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno».

Da queste affermazioni risulta molto presente il cosiddetto "modello della collana", già citato precedentemente in diversi contesti, in quanto fonte di ostacoli verso la comprensione del concetto di infinito matematico e della topologia della retta. In effetti, come conseguenza dell'aver accettato il modello intuitivo di segmento come filo formato da perline, si crea nella mente degli studenti un *modello parassita* (Fischbein, 1985) (vedi paragrafo 2.2). Ciò che sorprende è che dalle affermazioni fornite dagli insegnanti in questa ricerca, risulta che il "modello della collana" non rappresenta solo uno stratagemma didattico inventato in buona fede dagli insegnanti per fornire ai propri studenti un'idea di segmento, con la consapevolezza però che questa è solo un'approssimativa immagine assai distante dal reale concetto matematico di segmento, bensì appare come l'effettivo modello che gli insegnanti stessi hanno di segmento e di punto. Inoltre, dalle conversazioni risultano lampanti diverse manchevolezze nelle competenze degli insegnanti, legate soprattutto ai concetti di densità e di continuità della retta.

3.7.3 Infinito potenziale ed attuale

Durante lo scambio di opinioni, diversi insegnanti hanno fornito affermazioni che rientrano con forza in una visione potenziale dell'infinito; in effetti, anche quando alcuni insegnanti hanno proposto concezioni attribuibili all'infinito attuale, come: *«La retta è formata da infiniti punti»*, successivamente sono risultati incoerenti sostenendo che si dice retta solo per intendere un segmento che diventa sempre più lungo, rientrando così in una visione potenziale dell'infinito.

Qui di seguito abbiamo analizzato due dei tanti esempi che mettono in evidenza una visione potenziale dell'infinito:

R.: «Diciamo che i numeri naturali sono infiniti, ma sappiamo che questo non significa nulla, perché non si possono quantificare! È come dire un numero così grande che non si riesce a dire; nel senso che puoi sempre andare avanti. Dire retta è come non dire niente, mica esiste, è solo per dire che è una linea sempre più lunga».

Un aspetto che emerge dall'affermazione di R. è che la parola infinito viene citata, ma non rappresenta una quantità; affermare che i numeri naturali sono infiniti (frase molto usata che sembra a prima vista rientrare in una visione attuale dell'infinito), rappresenta solo un modo di dire un numero finito grande. Inoltre da questa affermazione sembrerebbe emergere la convinzione che tutto ciò che riguarda l'illimitato e l'infinito sia percepito come non esistente, essendo non rintracciabile nel mondo sensibile, mentre concetti come ad esempio: segmento, quadrato, rettangolo, dei quali è possibile ricercare attorno a noi approssimativi "modelli", siano colti come esistenti. Ma questa concezione fa perdere il significato della matematica e dei suoi concetti; in effetti, se non si percepisce l'astrattezza di tutti gli enti matematici, anzi ci si ostina a pensarli come esistenti nel mondo sensibile, si prova poi un forte disagio ad immaginare concetti come l'infinito matematico o la topologia della retta. Il problema che emerge è che alcuni insegnanti pensano che buona parte della matematica sia legata al mondo concreto e sensibile, mentre vi sono alcuni concetti come la retta o l'infinito che risultano lontani dal mondo delle cose e quindi non trattabili nella scuola primaria. Un insegnante in effetti ha affermato: *«Se una cosa non esiste come la retta, che senso ha insegnarla?»*. Le stesse considerazioni valgono anche per l'affermazione seguente:

N.: «Dico che i numeri sono infiniti, ma so che è solo immaginazione, che non si riesce ad ottenerli mai tutti, si dice per dire sempre più grande. L'infinito non lo puoi mica raggiungere».

Con concezioni di questo tipo è possibile fornire immagini agli allievi lontane dalla matematica che possono risultare di ostacolo nel momento in cui gli studenti si trovano a dover affrontare corsi di Analisi alle superiori, ma anche prima, quando nella scuola media vengono proposti concetti come: la densità di Q, i numeri irrazionali come π, il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato ed altri esempi ancora.

Dalle affermazioni degli insegnanti intervistati emerge quasi esclusivamente la visione potenziale dell'infinito; a tal proposito, sono state molto interessanti le discussioni che si sono avute quando il ricercatore ha tentato di far cogliere la duplice natura dell'infinito: attuale e potenziale, così come si era rivelata allo stagirita Aristotele (vedi paragrafo 1.1.1).

• 10 insegnanti rimangono ancorati alla visione potenziale dell'infinito; a questo proposito riportiamo uno stralcio di conversazione:

M.: «Per me esiste solo l'infinito potenziale, l'altro non c'è, è pura fantasia, dimmi dov'è?»

S.: « Parlando di retta»

M.: «Ma la retta, dov'è? Non c'è, è un'invenzione quindi l'infinito attuale non c'è»

S.: «Che cosa pensi della retta?»

M.: «Secondo me queste cose non andrebbero insegnate, almeno alle elementari, come fanno quei poveri bambini! Sì, tu lo puoi anche dire la retta è formata da infiniti punti, ma loro che cosa capiscono (non ci credo neanche io!), se non la vedono a quell'età non possono capire. Le cose le devono poter toccare con mano»

N.: «Per me esistono cose veramente grandi, ma pur sempre finite, il resto non esiste».

• 6 insegnanti sembrano percepire il senso dell'infinito attuale. In particolare, di 3 insegnanti si nota lo sguardo illuminato dell'avvenuta scoperta della distinzione che c'è tra le due concezioni: potenziali ed attuali.

A.: «Non ci avevo mai pensato a questa distinzione, ma ora ho capito, riesco ad immaginarlo»

B.: «Non ci avevo neanche mai pensato, nessuno mi aveva fatto riflettere su questo problema, ma sinceramente io ho sempre pensato che fosse solo nel senso di procedere sempre di continuo. Però ora ho inteso la differenza».

Da quest'ultima affermazione si sente il disagio degli insegnanti di non aver avuto modo di riflettere su questioni così importanti che coinvolgono temi che dovrebbero in parte dominare per evitare misconcezioni nei loro allievi.

Il problema di fondo è che "nessuna grandezza sensibile è infinita", quindi questi argomenti risultano contrari all'intuizione e distaccati dall'esperienza quotidiana (Gilbert e Rouche, 2001). A tal proposito, varie ricerche [Moreno e Waldegg (1991), Tsamir e Tirosh (1992), Shama e Movshovitz Hadar (1994), D'Amore (1996, 1997), Bagni (1998, 2001)] hanno messo in evidenza che nell'acquisizione dell'*infinito attuale* si individuano ostacoli epistemologici derivanti dall'intuizione primaria e la storia della matematica ne è una testimonianza. In effetti, come abbiamo potuto osservare nel capitolo 1, nei 2200 anni trascorsi da Aristotele ad oggi, la critica sull'infinito si è evoluta molto lentamente ed in modo non omogeneo.

La concezione dell'infinito fino al XVIII secolo era potenziale, così com'è potenziale l'impostazione di chi è lasciato all'intuizione e non ha avuto modo di riflettere su questi concetti. Eppure la concezione attuale dell'infinito risulta necessaria negli studi di Analisi, anche se si tende per anni a far credere agli alunni che vi sia un unico modo di pensare a questo concetto: il potenziale. Così che, la nuova necessaria concezione attuale dell'infinito con la quale si "scontrano" gli studenti alle superiori, potrebbe risultare di difficoltà insormontabile, dato che negli anni precedenti potrebbe essersi formato un modello intuitivo di infinito ben radicato e inteso solo in senso potenziale, legato solamente alle proprie intuizioni e a quelle dei loro insegnanti, ma lontane dal mondo della matematica.

Ancora, Tsamir (2000) afferma: *«La teoria cantoriana degli insiemi e il concetto di infinito attuale sono considerati contrari all'intuizione a tali da generare perplessità, pertanto non sono facilmente acquisibili; per insegnarli è necessaria una speciale sensibilità didattica»*; ma per chi non ha affrontato alle scuole superiori questi argomenti e non è stato più costretto ad un ripensamento, rimane l'immagine ancorata all'intuizione precedente basata solo sull'infinito potenziale.

Ma allora, se ai maestri (e non solo) questo argomento non è mai stato insegnato, è ovvio che non potranno che essere legati esclusivamente alle loro intuizioni, che la storia della matematica evidenzia come contrarie alla teoria; di conseguenza la "sensibilità didattica" di

cui parla Tsamir, non potrà essere presente e questo è fonte di ostacoli didattici collegati agli inevitabili ostacoli epistemologici.
Si evidenziano così ostacoli epistemologici rafforzati da ostacoli didattici. L'intuizione domina, ma è rafforzata anche dall'insegnamento ricevuto. Tutto appare come una catena che si autoalimenta: insegnanti che si fondano sulle loro intuizioni, che sono state a loro volta rafforzate dai loro insegnanti che si fondavano solo sulle loro intuizioni, che sono state a loro volta... Questa catena va interrotta mettendo in evidenza le carenze degli insegnanti e prevedendo di conseguenza una didattica specifica sull'infinito sia per insegnanti in formazione che per insegnanti in servizio, per ovviare così a quei disagi e a quelle difficoltà che tante ricerche hanno evidenziato in studenti di scuola superiore.

3.7.4 Il bisogno del "concreto"

Da diversi colloqui con gli insegnanti emerge un'opinione assai diffusa circa il bisogno che hanno i bambini di scuola primaria di modelli concreti per riuscire a capire i concetti matematici; tale opinione giustifica le scelte didattiche della collana di perline, come modello di segmento, o il segno lasciato dalla matita o il granello di sabbia, come modelli di punto matematico. Ma non tutto si presta ad essere modellizzato senza alcuna conseguenza, anzi molto spesso nella trasposizione didattica le scelte fatte derivanti da un eccessivo riferimento al mondo concreto, condizionano in modo negativo l'apprendimento futuro degli studenti. Inoltre, sperimentando con bambini di scuola primaria e con insegnanti disposti a cambiare impostazione nel loro insegnamento, si nota come per i bambini sia piacevole e semplice entrare in un mondo lontano dal mondo sensibile; allo stesso tempo si nota come, lavorando in questo modo, diventi più semplice per gli insegnanti affrontare i concetti matematici che sono per loro stessa natura lontani dal mondo concreto. A questo proposito viene spontaneo domandarsi se il bisogno del concreto sia un'esigenza dell'insegnante o dei bambini. In effetti, è ben evidente la difficoltà che mostrano la maggior parte degli insegnanti nel pensare a questioni distaccate dalla realtà del mondo che ci circonda e allo stesso tempo si nota la facilità ed il piacere che mostrano invece talvolta i bambini ad estraniarsi dal mondo sensibile. A questo proposito, riportiamo due affermazioni degli insegnanti avvenute durante i colloqui e che risultano in opposizione l'una rispetto all'altra. La prima è già stata riportata e analizzata da un altro punto di vista nel paragrafo 3.7.3:
M.: «Secondo me queste cose non andrebbero insegnate, almeno alle elementari, come fanno quei poveri bambini! Sì, tu lo puoi anche dire la retta è formata da infiniti punti, ma loro che

cosa capiscono (non ci credo neanche io!), se non la vedono a quell'età non possono capire. Le cose le devono poter toccare con mano»
A.: «Per me invece questi concetti si devono immaginare più che trovare; nella scuola elementare ci si riesce solo andando a pescare nell'immaginario che è ricchissimo: "Una retta è una linea che arriva fino nel più lontano spazio infinito", e loro se lo immaginano… Dico che il punto non si può misurare, pesare. C'è, ma non si vede, è come una magia. Così ci si riesce perché pescano in un mondo che non è più quello della concretezza. Bisogna andare in un mondo dell'immaginario, così ci riescono».
(Quest'ultima insegnante aveva sostenuto un esame di Analisi all'Università).

3.8 Risposte alle domande formulate in 3.4

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca formulate in 3.4.

P1. La risposta ci pare ampiamente negativa. Non vi è alcuna conoscenza di ciò che si intende per infinito matematico sia epistemologicamente che cognitivamente e questo deriva sicuramente dal tipo di tematica, totalmente caratterizzata da ostacoli epistemologici e dalla mancanza di uno studio specifico su questo argomento. L'infinito è, per gli insegnanti di scuola primaria, un concetto sconosciuto gestito solo dall'intuizione e per questo ridotto banalmente ad un'estensione del finito; questo è causa di modelli intuitivi che costituiscono vere e proprie misconcezioni. Ossia gli insegnanti accettano la nozione euclidea: *«Il tutto è maggiore di ogni sua parte»* per il finito e tendono a considerarla vera anche per l'infinito cadendo nel misconcetto di *dipendenza*; ma l'"essere sottoinsieme proprio" e "avere meno elementi" sono espressioni che non vanno confuse se si parla di insiemi infiniti. Ma l'insegnante di scuola primaria, avendo avuto durante la sua formazione, solo continue conferme di quello che avviene nel finito, lo ha assunto come modello intuitivo assoluto e, come tale, proposto ai propri allievi. Ossia gli insegnanti tendono a generalizzare per l'infinito ogni concetto che vale nel finito: se un insieme A è sottoinsieme proprio di un insieme B, allora automaticamente la cardinalità di B è maggiore di quella di A. Alla costruzione di questo misconcetto collabora anche il modello intuitivo che possiedono gli insegnanti del segmento come filo formato da perline e che porta alla *dipendenza* da fatti relativi a misure. Molto presente è inoltre il misconcetto di *appiattimento* che però ha sicuramente una ricaduta didattica meno influente nella scuola primaria rispetto alla *dipendenza*. Quanto alla retta come figura illimitata ed il conteggio prolungato dei numeri naturali, sembrano fornire agli insegnanti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che crea gravi ostacoli didattici (Tsamir e Tirosh, 1992; Shama e Movshovitz Hadar, 1994; Bagni, 1998, 2001; Tsamir, 2000).

P2. La risposta risulta affermativa. Le immagini intuitive degli allievi relative all'infinito vengono rafforzate dalle continue sollecitazioni degli insegnanti che tendono a trasferire ai propri allievi i loro modelli intuitivi che sono, a loro insaputa, vere e proprie misconcezioni (descritte in P1). Queste convinzioni permangono così nella mente degli studenti e si rafforzano, tanto da costituire un ostacolo difficile da superare al momento in cui l'infinito viene trattato in modo attuale alle superiori. In effetti modelli intuitivi, come ad esempio il modello del segmento come collana, rendono impossibile concepire e comprendere l'idea di densità che viene presentata a partire dalla scuola media o addirittura dalla scuola primaria. Per esempio quando si pongono i cosiddetti numeri frazionari sulla "retta razionale" r_Q, il modello della collana resiste e la densità resta un fatto puramente potenziale; inoltre a molti studenti la densità appare già riempitiva della retta e dunque non concepiscono che differenza vi sia tra r_Q ed r. Né li aiuta molto, qualche anno dopo, lo studio di R e la definizione di continuità; il modello intuitivo della collana continua a dominare.

P3. Risulta evidente da questa ricerca che, a parte gli ostacoli epistemologici (già evidenziati dalla letteratura internazionale), vi sono forti ostacoli didattici derivanti dai modelli intuitivi erronei degli insegnanti che vengono proposti ai propri allievi. Per aggirare tali ostacoli occorre una maggiore formazione su questo tema, in modo da allontanare l'idea di infinito da un'impostazione puramente ed esclusivamente intuitiva; risulta in effetti necessario rivedere la lista dei contenuti da proporre agli insegnanti in via di formazione iniziale a qualsiasi livello scolastico, in modo che gli studenti non arrivino ad affrontare lo studio dell'Analisi alle superiori già con forti misconcetti alle spalle. La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito attuale richiede infatti lo sviluppo di modelli intuitivi diversi, a volte addirittura opposti, rispetto a quelli che si usano nel finito. A nostro avviso bisognerebbe iniziare fin dalla scuola primaria un'opportuna educazione alla trattazione di insiemi infiniti che permetta allo studente di cominciare a notare le principali differenze che vi sono tra l'àmbito finito e quello infinito, sia nel campo geometrico che numerico.

3.9 Conclusioni a questo capitolo

In molte ricerche sul tema dell'infinito matematico, era maturata la convinzione che gli ostacoli che impediscono la comprensione di questo concetto siano soprattutto di natura epistemologica.

In questa ricerca si sono messe in evidenza le false credenze degli insegnanti di scuola primaria nei confronti dell'infinito, sorrette da immagini mentali erronee che condizionano le loro convinzioni, di conseguenza il loro insegnamento. Molti insegnanti coinvolti in questo lavoro di ricerca, dopo aver richiesto chiarimenti, hanno con convinzione e grande professionalità riconosciuto che il loro insegnamento era ricco di modelli sbagliati; modelli che i bambini ritrovavano confermati anno dopo anno e che, a detta degli insegnanti stessi, potevano essere il punto di partenza di futuri ostacoli didattici. Per questa sincerità e professionalità, vogliamo ringraziarli.

A nostro avviso le grandi difficoltà rilevate nella comprensione dell'infinito matematico non sono dovute solamente ad ostacoli epistemologici, ma amplificate anche da ostacoli di tipo didattico creati dalle idee intuitive degli insegnanti; è anche molto probabile che le lacune su questo tema non siano un problema esclusivo della scuola primaria, ma che siano invece diffuse ad ogni livello scolastico tra tutti quegli insegnanti a cui non è stata data l'occasione di riflettere sull'infinito matematico.

In effetti questo tema è risultato fino ad ora troppo sottovalutato, soprattutto come argomento di formazione degli insegnanti, e sembrerebbe che proprio da questa mancanza derivino in parte le difficoltà degli studenti di scuola superiore che portano con sé forti convinzioni antecedenti non idonee ad affrontare le nuove situazioni cognitive. Bisogna quindi tentare di inibire e superare i modelli che provocano ostacoli nella mente degli insegnanti, e di conseguenza degli allievi, proponendo, come abbiamo già sostenuto in diversi punti di questo capitolo, corsi di formazione per insegnanti di scuola primaria che tengano conto degli aspetti intuitivi e delle peculiarità dell'infinito, oltre che dei risultati rilevati dai ricercatori in didattica della matematica. Corsi basati sulla discussione, sul confronto con gli aspetti storici, che permettano di partire dalle idee intuitive primarie per poi evolvere in nuove, più evolute, convinzioni.

Questa necessità è stata anche evidenziata ed esplicitata con forza, da parte di tutti gli insegnanti coinvolti in questo lavoro di ricerca. A questo proposito si riportano di seguito due interventi di insegnanti:

M.: «Sì, è la geometria che facciamo che tende a farceli vedere i punti. Ci vorrebbe qualcuno che ci faccia riflettere su queste cose e sull'importanza di trasferirli in modo corretto. Nella matematica che abbiamo fatto noi, non ci facevano riflettere su queste cose. Ci vorrebbe un po' di teoria a monte».
A.: «Noi pecchiamo di semplificazione, senza studiare la teoria. Siamo convinte di averla, ma non l'abbiamo la teoria. Ci preoccupiamo di trasferirla in modo concreto, senza approfondire come funziona».

Questa formazione farà sì che gli insegnanti della scuola primaria curino i concetti relativi agli insiemi infiniti, coinvolgendo gli alunni in esperienze significative e in attività che permettano di costruire immagini intuitive coerenti con la teoria degli insiemi infiniti.

Capitolo 4. Linee di ricerca presenti e future

4.1 Il primo corso di formazione su questo tema

Il capitolo precedente si è concluso ribadendo l'importanza di corsi di formazione per insegnanti sul tema dell'infinito, per favorire un'evoluzione delle convinzioni verso una visione "avanzata" di questo argomento. Per questo, negli ultimi due anni abbiamo iniziato un "percorso" di formazione con 37 insegnanti di scuola primaria e 8 insegnanti di scuola secondaria inferiore di Milano che ha portato le nostre considerazioni verso nuove riflessioni. La scelta dei docenti è avvenuta come conseguenza di un seminario che si è tenuto nel 2001 al Convegno di Castel San Pietro Terme: "Incontri con la matematica n. 15", rivolto ad insegnanti della scuola di base dal titolo: *"Infiniti e infinitesimi nella scuola di base"*. Concluso il seminario, un folto numero di insegnanti incuriositi dall'argomento e riconoscendo nelle loro convinzioni gli stessi misconcetti descritti nel capitolo 3, si sono avvicinati manifestando immediatamente il bisogno di saperne di più di un argomento sul quale non avevano mai avuto modo di riflettere. Questa "scelta" è quindi partita dalla sincera motivazione di insegnanti che desideravano scoprire in profondità questo, fino ad allora, sconosciuto argomento. Si è quindi presentata per noi una situazione ideale per iniziare un "percorso" non solo di formazione, ma di vera e propria ricerca, che sta diventando di giorno in giorno sempre più ricco e pieno di stimoli. Prima di iniziare nel 2001 il corso di formazione abbiamo proposto lo stesso questionario presentato e commentato nel paragrafo 3.6.2 con la stessa metodologia descritta nel paragrafo 3.6, per valutare se le convinzioni di questi insegnanti rientravano in quelle già rilevate nel capitolo precedente. Possiamo affermare, senza andare nel dettaglio per non essere ripetitivi, che i risultati avuti sono in linea con quelli già evidenziati precedentemente; in più, abbiamo potuto rivelare come non vi sia sostanzialmente differenza tra le concezioni degli insegnanti di scuola primaria e quelle degli insegnanti di scuola secondaria inferiore, mettendo così in evidenza come risulti quasi scontato rimanere ancorati alle proprie ingenue intuizioni per argomenti così intrisi di ostacoli epistemologici, a meno che non avvenga una vera e propria formazione specifica sul tema. Di questi 8 insegnanti di scuola secondaria, 2 sono laureati in matematica e 6 in altre materie scientifiche; nessuno aveva mai seguito un corso su questo argomento all'Università, o successivamente, per questo non si è notata una differenza tra i diversi tipi di laurea, ma

ancora più sorprendentemente tra una laurea in matematica, che non ha permesso una riflessione profonda e specifica su questo argomento, e un "semplice" diploma di quattro anni di istituto magistrale che consentiva, fino a pochi anni fa in Italia, di insegnare alle scuole primarie. È veramente stupefacente come di fronte ad argomenti così epistemologicamente complessi si annullino completamente gli altri saperi, facendo sì che tutti abbiano sostanzialmente le stesse convinzioni.
I risultati di questa esperienza sono a disposizione presso l'Autrice di chiunque voglia consultarli, ma possono comunque essere sostanzialmente riletti nelle riflessioni riportate nel capitolo 3.

L'unica differenza che si è potuta percepire è basata sul diverso tipo di espressioni usate durante la discussione avvenuta tra quattro insegnanti alla volta di scuola secondaria; queste vertevano spesso sull'esplicitazione di quelle che rappresentano per loro "definizioni" che ritrovano nei libri di testo adottati e che vengono di conseguenza proposte ai propri allievi; definizioni che risultano però molte volte improprie, mal poste e mal gestite.
Tanto per fare alcuni esempi, analizziamo una risposta di un insegnante di scuola secondaria inferiore alla domanda 4 del questionario contenuto nel paragrafo 3.6.2, basata sulla richiesta se ci sono più punti in un segmento più lungo o in uno più corto:
S.: «Dunque… dato che ***un punto è un ente geometrico fondamentale della geometria privo di dimensione****, direi che non si può dire se ce ne sono di più in AB o in CD. Però è anche vero che* ***una retta è formata da infiniti punti****, ma questi sono segmenti. Be', la diversa lunghezza dei segmenti in qualche modo inciderà, quindi direi che ci sono più punti in CD. Sì, sì, ce ne devono essere di più in CD».*
Abbiamo evidenziato in neretto le espressioni che comunemente vengono considerate dagli insegnanti, a detta loro, come "definizioni" non solo nella scuola secondaria inferiore ma, come vedremo nel paragrafo 4.3, anche nella scuola secondaria superiore.
Come si nota già da questo esempio, la gestione di questi "saperi" nozionistici a volte impropri, non capiti e interiorizzati nel loro vero significato, non porta in realtà a risultati diversi da quelli manifestati più semplicemente dagli insegnanti di scuola primaria: *«Il sapere non è nei libri, è la comprensione del libro. Se si considerano i risultati scientifici, si ammette generalmente che chi li sa enunciare senza rendersene ragione non li sa (…). Il sapere non è né una sostanza né un oggetto, è un'attività intellettuale umana, fatta da soggetti che si sforzano di rendere ragione di quel che fanno e dicono (attraverso la dimostrazione, il ragionamento)»* (Cornu e Vergnioux, 1992). L'insegnante F. di scuola secondaria, seppure

non sostiene come la collega di scuola primaria riportata nel paragrafo 3.7.2 che: «*Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno*», alla fine ribadisce che vi sono più punti in un segmento più lungo piuttosto che in uno più corto, manifestando così una visione del punto che non può essere a-dimensionale, se deve dipendere dalla misura, come invece sosteneva inizialmente ripetendo mnemonicamente un sapere.

Si nota quindi una mancanza di consapevolezza su ciò che si pensa di conoscere, soprattutto quando si parla di argomenti delicati come possono essere gli enti primitivi della geometria. Da queste considerazioni è iniziato un filone di ricerca tuttora in corso che verte proprio sul tema degli enti primitivi della geometria, argomento fortemente collegato al concetto di infinito matematico e che sarà descritto nel paragrafo 4.3.

Queste carenze cognitive incidono in modo decisivo sulla *trasposizione didattica* (vedi paragrafo 2.4), le cui scelte possono essere il frutto di misconcetti, o addirittura di modelli erronei, che sono la base di esperienze didattiche mal poste dagli insegnanti e presentate sempre nello stesso modo, anno dopo anno. Come abbiamo già rilevato nel paragrafo 3.8 per molti insegnanti, e di conseguenza per molti allievi, la densità appare già riempitiva della retta e risulta quindi incomprensibile la differenza tra r_Q ed r, anche quando viene presentato l'insieme R e la definizione di continuità. La distinzione tra densità e continuità non è certo favorita dall'acritico uso del supporto retta, che inizia fin dalla scuola primaria per N, con vari problemi didattici (Gagatsis e Panaoura, 2000) e prosegue poi nei livelli scolastici successivi (Arrigo e D'Amore, 2002).

Ancora, del tutto negativa è l'insistenza in tutti i livelli scolastici sul modello "naturale" dell'ordine di Z che, proprio per la sua estrema semplicità e immediatezza, non solo concettuale ma soprattutto grafica, si rivela poi univoco e insuperabile anche quando si presenta la corrispondenza biunivoca tra l'insieme Z e l'insieme N che richiede un ordine diverso degli elementi di Z rispetto a quello "naturale" (Arrigo e D'Amore, 2002) (vedi paragrafo 1.2.5).

Altro esempio di riflessione effettuato da un insegnante di scuola secondaria inferiore come risposta alla domanda n. 7 dello stesso questionario: *Quanti sono i numeri naturali: 0, 1, 2, 3…?*:

F.: «I numeri naturali sono infiniti, perché ***un insieme è infinito se è formato da infiniti elementi*** *e 0, 1, 2, 3, … sono infiniti».*

Lo stesso insegnante dovendo rispondere alla domanda n. 10: *Sono di più i numeri pari o i numeri naturali?*, afferma:

F.: «Sono di più i numeri naturali dei pari, per forza sono il doppio».

È importante mettere in evidenza ancora una volta come risultano improprie le "definizioni" che spesso vengono fornite nei libri di testo; solo per darne un esempio nella parte di Aritmetica di un testo per le scuole secondarie inferiori, sotto il titolo: ***insiemi finiti, insiemi infiniti***, si riporta il seguente breve paragrafo:

*"Gli insiemi di cui abbiamo parlato sono costituiti da un numero ben preciso, **finito**, di elementi",* (alludendo così che un insieme infinito, come l'insieme dei numeri naturali, non è formato da un numero ben preciso di elementi, come invece è in realtà: infinito numerabile. Queste considerazioni portano inevitabilmente ad associare l'infinito con l'indeterminato).

E continua nel seguente modo:

*"In matematica però puoi incontrare insiemi costituiti da un numero **infinito** di elementi"* (il termine infinito era evidenziato nel testo). Si introducono così gli insiemi infiniti come insiemi costituiti da un numero infinito di elementi, affermazione che si trova in numerosi libri di scuola secondaria inferiore e che viene percepita dagli insegnanti come "definizione" (F.: *«C'è scritto nel libro di testo»*), mentre in alcuni libri di scuola superiore la stessa affermazione viene proposta tra le "idee primitive".

Questo breve paragrafo sugli insiemi finiti e infiniti, continua e si conclude così: *"Costituiscono, ad esempio, un insieme infinito, i numeri interi: infatti, comunque tu consideri un insieme finito di numeri interi, puoi sempre trovare un numero intero diverso da quelli considerati"* (idea che rientra in una visione esclusivamente potenziale di infinito e che ricorda l'impostazione euclidea degli "Elementi"). Questa stessa visione potenziale si ritrova in numerosi testi come in un libro molto adottato per le scuole secondarie inferiori in Italia, che inizia il capitolo relativo ai numeri con questa affermazione: *"un ultimo numero non si raggiungerà mai anche continuando ad aggiungere 1 e 1 e 1…"* e continua con: *"l'insieme dei numeri naturali è **infinito**"* (idea che può portare ai misconcetti presentati nel paragrafo 3.7.1 del tipo: infinito come indefinito o infinito come numero finito grande). In effetti, fornendo esclusivamente questa visione potenziale dell'infinito si trasmetterà all'insegnante e all'allievo l'idea che l'infinito non possa mai essere concepito come un oggetto in sé, come una qualcosa di definito che si possa afferrare, "raggiungere" e dominare.

Nei libri di testo si parte in alcuni casi dagli insiemi finiti per poi passare a definire quelli infiniti, in altri casi si usa il procedimento contrario, definendo successivamente un *"insieme finito come un insieme che non è infinito"*. La critica non è qui rivolta alla definizione al negativo, in quanto ci uniamo al pensiero di Bolzano (1781-1848), riportato nel testo in bibliografia del 1985, che verte sul fatto che se esistono concetti cosiddetti "positivi", nulla

vieta che ne esistano di “negativi” e che per questi nulla impedisce una definizione al negativo. In effetti la definizione di insieme infinito viene data di solito a carattere positivo mentre quella di insieme finito in modo negativo, anche se spesso nei testi filosofici si legge che “finito” sarebbe il concetto “positivo”, mentre “infinito” (nel senso di non-finito) quello “negativo”. [Su questa questione, e sulle difficoltà di definire il concetto di “finito” si veda Marchini, 1992].
Il punto cruciale sta invece su quale definizione di insieme infinito si sceglie e sui circoli viziosi che molto spesso si creano non partendo da una definizione che rispecchi il concetto; queste false definizioni non fanno altro che amplificare i misconcetti degli allievi e quelli degli insegnanti.

A questo punto occorre chiarire le finalità di un libro di testo, che è il risultato di una trasposizione didattica scelta dagli Autori e non va quindi interpretato dall’insegnante come un libro di matematica nel quale si possono apprendere concetti. Il sapere dovrebbe già essere dominato dall’insegnante nel momento in cui adotta un libro di testo e queste conoscenze dovrebbero essere semplicemente rilette e reinterpretate nella trasposizione didattica scelta dall’Autore del libro di testo, per poi riadattarle personalmente nel particolare contesto-classe. Invece, per quanto concerne l’infinito matematico, capita spesso che l’insegnante non conosca questo sapere, quindi non fa altro che associare alla trasposizione didattica dei libri di testo, la funzione di trasmettitore di contenuti matematici, e questo si può percepire dal frequente tentativo di giustificare le proprie risposte riguardanti contenuti matematici con frasi del tipo: *«C’è scritto nel libro che adottiamo»*. Eppure domini del sapere, concetti, dal momento in cui entrano in un libro di testo, subiscono una trasformazione massiccia, sono snaturati per trovare un altro statuto, un’altra logica, un’altra razionalità, influenzata dai requisiti richiesti da una pedagogia scolastica che impone a loro una forma diversa.

Tornando alla “definizione” di insieme infinito, dire che un insieme è infinito se è formato da infiniti elementi, non può certamente essere considerata una definizione attendibile e non può portare a far cogliere che due insiemi infiniti, come ad esempio quello dei numeri naturali e dei pari, sono formati dallo stesso numero di elementi. Invece una definizione di insieme infinito corretta, che all’apparenza però può apparire contorta, è quella detta di Galileo-Dedekind (vedi paragrafo 1.2.2): *“Un insieme è infinito quando si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria”*; che permette di afferrare l’idea che gli insiemi dei numeri naturali e dei pari potrebbero essere formati dallo stesso numero di elementi, se solo si riuscisse a trovare una corrispondenza biunivoca opportuna tra loro (riportata nel paragrafo 3.6.2).

È quindi lampante il problema della trattazione di questi argomenti nei libri di testo, dove gli Autori tendono a diffondere questioni assai delicate senza la necessaria cautela critica, che è invece un'accortezza da pretendere da parte di chi produce materiali destinati all'àmbito didattico. Purtroppo un atteggiamento tipico dei lettori, sia degli studenti che degli insegnanti, è, come abbiamo potuto osservare, di non avere sufficiente capacità critica su ciò che viene scritto a stampa, per questo tutto quello che si trova su un qualsiasi libro è considerato degno di fede. La nostra intenzione futura sarà anche quella di analizzare, per quanto riguarda questo tema, i libri di testo adottati generalmente dagli insegnanti, valutandone le imprecisioni e le manchevolezze e cercando di cogliere, con apposite metodologie, la fiducia cieca che viene riposta dagli insegnanti su questo strumento didattico.

Nel 2001, dopo la proposta del questionario iniziale, si è impostato il corso di formazione su questo tema seguito inizialmente da 45 insegnanti che, avendo gli stessi misconcetti iniziali, provavano la sensazione ben espressa da un insegnante di scuola secondaria inferiore: *«In questo caso, siamo davvero tutti nella stessa barca!»*. Il corso strutturato in diversi incontri, che continua ancora oggi con un ristretto gruppo di insegnanti, è stato pensato inizialmente partendo dalla storia della matematica relativa a questo tema (vedi cap. 1).

Questa scelta deriva dalla consapevolezza di dover sradicare convinzioni influenzate da forti ostacoli epistemologici. Eravamo certi di questo, dato che si presentavano entrambe le caratteristiche messe a punto nell'àmbito del gruppo di ricerca di Bordeaux, e riportate in D'Amore (1999), per poter individuare un ostacolo epistemologico:

• nell'analisi storica di un'idea, si deve riconoscere una frattura, un passaggio brusco, una non-continuità nell'evoluzione storico-critica dell'idea stessa (di questo, la storia dell'infinito è testimonianza);

• uno stesso errore si deve verificare come ricorrente più o meno negli stessi termini. (Questi stessi errori che coincidono con le fratture storiche si sono rintracciate tra le considerazioni espresse dagli insegnanti coinvolti).

Partendo da questa consapevolezza, abbiamo ritenuto fondamentale instaurare durante il corso uno stretto legame tra la storia della matematica e l'aspetto didattico, coniugando un àmbito con l'altro tramite la discussione e il confronto che partiva dalle idee intuitive primarie degli insegnanti per poi evolvere in nuove, più evolute, convinzioni. Questo veicolo è risultato fondamentale, in quanto ha permesso una lettura critica da parte degli insegnanti delle proprie idee che rintracciavano anche in affermazioni di alcuni personaggi storici; tale confronto ha permesso di sradicare i misconcetti che si erano manifestati nel questionario iniziale. Inoltre, per molti insegnanti, l'esplicitazione di queste fratture storiche, di queste discontinuità, che mostrano situazioni erronee nelle quali i matematici si sono venuti a trovare, ha permesso di capire il senso che ha l'errore in matematica (D'Amore e Speranza, 1989, 1992, 1995). Lo studio della storia è quindi risultato fondamentale per gli insegnanti come chiave critica di autoanalisi. In particolare, in questi anni, tre insegnanti di scuola primaria hanno deciso spontaneamente di tenere memoria del loro percorso, scrivendo di volta in volta come si sono evolute le loro convinzioni. L'intenzione è di poter pubblicare prossimamente i risultati di questo percorso di formazione visto con gli occhi di una o più insegnanti di matematica di scuola primaria (nel paragrafo 4.4.3 leggeremo alcuni stralci di questa autovalutazione realizzati da due di questi insegnanti).

L'efficacia del corso si può rileggere in alcune delle seguenti affermazioni di insegnanti di scuola primaria: *«Ho imparato di più da queste lezioni che non in tutta una vita di insegnamento di matematica e di corsi di aggiornamento. Mi sembra di capire che cos'è la matematica solo ora, a pensare che la insegno da 27 anni. Questa scoperta mi ha davvero sconvolto la vita»*; *«Ho capito che cos'è l'infinito attuale e l'ho accettato con disinvoltura da quando ho deciso di aver la forza di concepirlo come oggetto in sé, un tutt'uno. Ora mi sento più forte»*; *«Mi accorgo di essere molto più attenta con i miei bambini e allo stesso tempo molto più aperta alla discussione. Soprattutto cerco di lavorare sulle loro intuizioni così come hai fatto tu con noi. Ne sono felici»* e di scuola secondaria inferiore: *«Mi hai illuminata! Finalmente ho capito cose che ho sempre ripetuto e insegnato ma alle quali non avevo in realtà mai pensato. Te ne sono molto grata»*; *«Ormai non riesco più ad accontentarmi di insegnare come facevo prima… non posso più tornare indietro»*; *«Quello che mi ha stupita di più è stato scoprire di non sapere neanche quello che insegno. Vuoi che ti dica che cosa in particolare? Non mi ha fatto dormire tutta una notte sapere che* $3,\overline{9}$ *è proprio uguale a 4 e non gli manca proprio niente. Non è che lo approssima, è proprio uguale. A pensare che la "regola dei periodi" l'ho sempre fatta vedere, ma mai per questi casi così particolari. Li evitavo perfino apposta per non creare confusione, quindi non l'avevo mai visto»*. Degli 8 insegnanti di scuola secondaria inferiore solo uno, laureto in matematica, sapeva che $3,\overline{9}=4$ anche se inizialmente, con estrema onestà, ammetteva che a parer suo rappresentava una forzatura che accettava come un dato di fatto, mentre tutti gli altri durante il corso sostenevano inizialmente tesi del tipo: *«Laggiù* (indicando con il dito un punto all'"infinito"), *gli mancherà pure qualcosa!»*. Successivamente accettando un po' alla volta la visione dell'infinito in senso attuale, sono riusciti a concepire e ad accettare questa nuova scoperta. La verifica dei risultati raggiunti dagli insegnanti nell'evoluzione delle loro concezioni è stata quindi una lenta, sofferta, ma costante, evoluzione che si è percepita, e si continua ancora oggi a percepire, durante la discussione negli incontri di formazione. Questa esperienza è risultata molto ricca e significativa dal punto di vista scientifico: la scoperta della tendenza di noi docenti durante i corsi di formazione rivolti agli insegnanti a dare per scontato dei saperi fondamentali che in realtà risultano invece mal interpretati; la scoperta che addirittura alcuni temi risultano per gli insegnanti del tutto sconosciuti, creando così delle fratture e delle incoerenze nell'insegnamento e la base per ostacoli didattici; la scoperta effettiva dell'importanza che ha assunto in questo àmbito indirizzare la ricerca prima sulle convinzioni degli insegnanti, per poi passare a quelle degli allievi; la scoperta che si apre attorno all'infinito, da un punto di vista didattico, un mondo nuovo ancora tutto da scoprire.

Con questi 45 insegnanti abbiamo ancora stretti rapporti, ma in particolare si è creato un ristretto gruppo di lavoro formato da 5 insegnanti di scuola primaria con il quale si è scelto di lavorare più in profondità da diversi punti di vista.

Con questi insegnanti si è deciso finalmente di passare dagli insegnanti agli allievi, ossia di ritornare da dove eravamo partiti con le prime osservazioni nel 1996. In quell'anno, come abbiamo rilevato nel cap. 3, abbiamo indagato sulle convinzioni dei bambini di scuola primaria[39] che non facevano altro che riportare per questo tema i saperi appresi dai loro insegnanti. [In questo senso, cioè volto al collegamento tra concezioni che hanno gli allievi, in relazione a concezioni che hanno gli insegnanti, celebre è l'esempio di El Bouazzaoni (1988) che tratta della nozione di continuità di una funzione]. Indagando con gli allievi, ci eravamo potuti rendere conto delle grandi potenzialità che si hanno quando si ha a che fare con bambini di scuola primaria, non solo quando si fa uso del mondo "concreto", ma anche quando si ha il coraggio di permettere all'allievo di passare in un mondo ultrasensibile, come può essere quello dell'infinito, staccandosi così dal mondo sensibile.

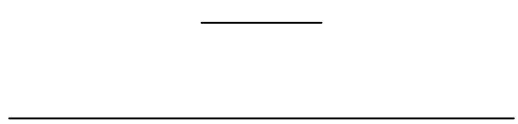
Non andremo nello specifico di questa trattazione, dato che questa tesi riguarda le convinzioni degli insegnanti, piuttosto che quelle degli allievi, comunque vogliamo fare solo qualche piccolo accenno per far cogliere ciò che si era rilevato.

[39] Per quanto riguarda ricerche specifiche relative al tema dell'infinito rivolte a bambini di scuola primaria rimandiamo il lettore ai seguenti riferimenti bibliografici: Bartolini Bussi (1987, 1989) rivolte a bambini di scuola primaria e addirittura di scuola dell'infanzia; Gimenez (1990) che focalizza la sua attenzione sulle difficoltà del concetto di densità proprio nella scuola primaria; Tall (2001b) che si occupa della evoluzione del concetto di infinito a partire dalla scuola dell'infanzia, riferito ad un particolare caso di un bambino di nome Nic.

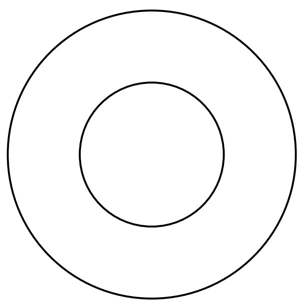
4.2 Breve racconto della ricerca eseguita con bambini di scuola primaria nel 1996

Questa ricerca è stata indirizzata su due classi di quinta primaria di Forlì, per un totale di 38 bambini che venivano chiamati a coppie fuori dall'aula in presenza del ricercatore. Gli accordi espliciti concordati fin dall'inizio con i bambini erano che tutto ciò che avrebbero detto fuori dall'aula non sarebbe mai stato fonte di valutazione e non sarebbe stato esplicitato ai loro insegnanti, per evitare così che clausole del contratto didattico, nate da una situazione di classe, influenzassero il contratto sperimentale (Schubauer Leoni, 1988, 1989; Schubauer Leoni e Ntamakiliro, 1994) che si stava instaurando con il ricercatore. La scelta di somministrare la proposta a coppie, invece che individualmente, è derivata sia dall'intento di fornire maggiore coraggio ai bambini di sottoporsi alle nostre richieste, ma soprattutto è nata dell'esigenza di instaurare discussioni che ci consentissero di percepire in profondità le reali convinzioni degli intervistati. La metodologia seguita consisteva nell'introdurre i bambini in un'aula e nel farli sedere uno a fianco all'altro dalla parte opposta di un tavolo rispetto al ricercatore che disponeva, all'insaputa dei bambini, di un registratore. In nessuna delle due classi sottoposte alla ricerca, gli insegnanti avevano precedentemente proposto attività specifiche riguardanti l'infinito.

Inizialmente il ricercatore consegnava un foglietto dove erano rappresentati i seguenti due segmenti di lunghezze diverse e chiedeva: «*Che cosa rappresentano per voi?*»



Conclusa la risposta e chiarendo che si trattava di due segmenti, si continuava con questa domanda: *«Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in questo segmento* (indicando con il dito i due segmenti)» (domanda che ricalca sostanzialmente la n. 4 del questionario presentato nel paragrafo 3.6.2). Dopo che i bambini avevano risposto e discusso tra loro, si mostrava la dimostrazione di Cantor che mette in evidenza come vi siano lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse (vedi paragrafo 3.6.2). Successivamente si consegnava un altro foglietto dove erano



rappresentate due circonferenze concentriche di lunghezze diverse e si chiedeva. *«Ci sono più punti in questa circonferenza o in questa?* (indicando con un dito le due circonferenze)».
All'interno delle discussioni poteva avvenire che il ricercatore facesse altre domande o considerazioni mirate al solo scopo di incentivare il confronto, ma stando sempre attento a non influenzare le opinioni degli intervistati.
Successivamente si chiedeva: *«Che cos'è per voi l'infinito matematico?»* e si lasciavano discutere i bambini fino a quando non si concludeva l'eventuale confronto.

Facciamo quindi un breve accenno ad alcuni risultati riscontrati. In neretto si sono indicati gli interventi effettuati dal ricercatore durante la discussione, per sollecitare la conversazione e per indagare più in profondità sulle convinzioni dei bambini.

• Molti bambini alla prima domanda: *«Che cosa rappresentano per voi?»* (mostrando i due segmenti di lunghezze diverse) non hanno risposto due segmenti, ma spesso affermavano genericamente: *«Linee»* o *«Retta»*, altri ancora notavano saperi da noi non previsti come:

S.: «Sono le basi, le abbiamo ripassate venerdì»

R.: «Di che cosa?»

S.: «Di un rombo, anzi di un romboide»

R.: «Me lo vuoi disegnare?»

S. disegna un trapezio.

Un altro bambino risponde in questo modo:

F.: «Sono linee parallele. Le linee parallele non sono come le linee concorrenti, che si incontrano in un unico punto. Queste sono infinite (nel senso che non si incontrano)» (qui si rileva l'uso del "matematichese"[40]).

• Dopo aver precisato agli intervistati che la loro attenzione si doveva concentrare sui due segmenti, si è rivolta la domanda: *«Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in questo?»*.
Le risposte a questa domanda sono state nella maggioranza dei casi del tipo: nel segmento più lungo. Solo un bambino sosteneva che ve ne erano di più in quello più corto, perché G.:

[40] Questa idea risale a D'Amore (1993a) e rappresenta una specie di "dialetto matematico" che si usa in classe. Una lingua speciale adoperata dallo studente in quanto considerata quella corretta, giusta, doverosa, da usare per obbligo "contrattuale" nelle ore di matematica. Ma spesso l'allievo dovendo sopportare il "peso" di questa nuova lingua, rinuncia al senso della richiesta o al senso del suo discorso.

«Basta allungarlo e farlo diventare più grande dell'altro». Invece 16 bambini hanno risposto: *«Uguali»*; 2 lo hanno affermato senza alcuna motivazione e senza dire che vi sono infiniti punti in entrambi i segmenti, mentre in ben 14 casi, tutti relativi alla stessa classe, i bambini hanno sostenuto che vi è lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse, e precisamente due in ciascuno, che rappresentano gli estremi dei segmenti. Questo mette in evidenza come spesso l'attenzione didattica dell'insegnante, e di conseguenza quella dell'allievo, si concentri maggiormente su piccoli dettagli, convenzioni, formalismi poco significativi nell'esplicitazione di un concetto. (Sulla visione di matematica che possiedono gli insegnanti, si rimanda a: D'Amore, 1987; Speranza 1992; Furinghetti, 2002).
Vediamo uno stralcio di conversazione avvenuto tra due bambini, di cui uno aveva dato l'interpretazione sopra menzionata.

R.: «Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in questo segmento»

M.: «In questo (indicando il segmento più lungo)»

I.: «No, sono uguali. Ci sono i due punti»

R.: «Che cosa intendi?»

I.: «Ci sono in tutti e due i due punti che delimitano il segmento. Ce lo ha detto la nostra maestra».

R.: «Quindi, secondo te quanti punti ci sono in un segmento?»

I.: «Uguali, sono sempre due».

Un caso significativo è quello di un bambino che pur rispondendo alla prima domanda: *«Sono due segmenti. La maestra ci ha fatto scrivere che un segmento è un insieme di infiniti punti geometrici»*, successivamente sostiene che vi sono più punti nel segmento più lungo, mostrando così di non aver colto il significato della sua affermazione precedente. Questo dimostra che occorre fare molta attenzione prima di proporre definizioni e soprattutto prima di considerare le risposte dello studente soddisfacenti, solo perché coincidenti con la definizione data o sperata: ripetere una definizione non significa averne capito il significato.

• Dalle conversazioni dei bambini emergono diversi misconcetti relativi agli enti primitivi della geometria; false credenze che influenzano negativamente l'apprendimento successivo e che saranno analizzate più in dettaglio nel paragrafo seguente. A nostro parere, questi risultati mettono in evidenza come sia importante non lasciare i concetti semplicemente ad un atto di intuizione, mentre risulta fondamentale lavorare su questi saperi, pensando a specifiche e strutturate attività come quelle proposte nei paragrafi 4.4.3 e 4.5.3.

• Dopo aver mostrato la corrispondenza biunivoca di Cantor tra i due segmenti di lunghezze diverse (vedi paragrafo 3.6.2), la maggior parte dei bambini ha intuito immediatamente che i due segmenti sono formati dallo stesso numero di punti. In altri casi, invece, questa scoperta è risultata più lenta ma è comunque avvenuta:

G.: «Ecco un triangolo. Vuoi il perimetro?» (G. aveva individuato un triangolo dopo che il ricercatore aveva disegnato partendo dal punto di proiezione O due semirette che intersecano i due segmenti; il tentativo era di spendere un sapere appreso in classe, sottovalutando ciò che gli era stato realmente richiesto).

R.: «No, niente perimetro».

G.: «Quindi i punti sono 2 in ciascuno»

R.: «Guarda» (si mostrano altri due punti che corrispondono tramite la corrispondenza biunivoca)

G.: «Allora sono 3»

R.: «Ma ci sono anche questi» (se ne mostrano altri due)

G.: «Allora sono 4»

R.: «Ma ci sono anche questi» (se ne mostrano altri due)

G.: «Ah, ho capito: sono infiniti»

R.: «Ci sono più punti in questo segmento o in questo?»

G.: «Uguali»

R.: «Siete convinti?»

Entrambi: «Sì, sì»

Tramite la dimostrazione, alcuni bambini hanno capito che i due segmenti sono formati dallo stesso numero di punti, ma non sapevano dire quanti, quindi rispondevano con frasi del tipo:

F.: «Sono uguali. Sono tanti, ma non so di preciso quanti».

Tranne 4 bambini, tutti si sono detti convinti della nuova scoperta, ossia che due segmenti di lunghezze diverse sono formati dallo stesso numero di punti e una parte di questi sosteneva che in entrambi ve ne sono infiniti, anche se poi rispondendo alla domanda su che cos'è l'infinito, non mostravano di conoscere l'idea avanzata del concetto. Un aspetto interessante da rilevare è che la corrispondenza biunivoca proposta non ha stupito i bambini, come invece è avvenuto, alcuni anni dopo, quando si è presentata la stessa costruzione agli insegnanti.

Solo 4 bambini sono rimasti perplessi e hanno affermato di non essere convinti della dimostrazione e questo è dipeso dai forti misconcetti che possedevano relativi al punto matematico:

A.: «Per me dipende sempre, perché se i puntini qui li fai più piccoli e qui li fai più grandi. Non si sa quanti ce ne sono» (da questa risposta, si nota come sia fondamentale l'idea che hanno i bambini di punto matematico, per questo rimandiamo al paragrafo 4.4).

• Dopo aver mostrato le due circonferenze concentriche, quasi tutti i bambini hanno intuito immediatamente che il numero dei punti che le formano sono uguali e la maggior parte è riuscito a costruire personalmente e con facilità la corrispondenza biunivoca partendo dal punto centrale, trasferendo così un sapere appreso precedentemente.

R.: «Ora guardate questo (si è mostrato il foglietto con le due circonferenze concentriche di lunghezze diverse)**»**

M.: «È una corona circolare, ma non l'abbiamo ancora fatta» (manifestando così una clausola del contratto didattico (vedi paragrafo 2.1) del tipo: "È lecito fare domande solo sugli argomenti già affrontati in classe")

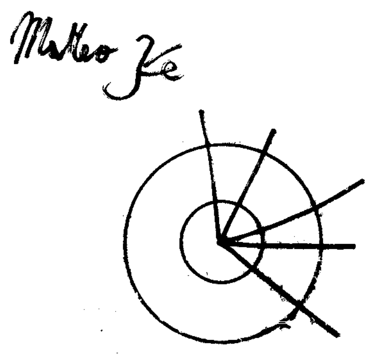
R.: «Ci sono più punti in questa circonferenza o in questa?»

M.: «Uguali come prima, perché non conta se una è piccola o una è grande»

S.: «Anche per me»

R.: «Perché secondo voi?»

M.: «È come prima che fa: tu… tu… tu» (disegna la corrispondenza biunivoca tra le due circonferenze concentriche partendo dal centro)



R.: «Che cosa mi hai fatto vedere?»

M.: «Che a questo puntino corrisponde questo, a questo… questo. Quindi sono uguali perfettamente. Se uno capisce quello là, capisce anche questo»

S.: «Basta capirne uno per capirli tutti»

R.: «Quale vi piace di più?»

M.: «La ruota, perché l'ho inventata io» (da questa risposta risulta lampante come un sapere acquisito personalmente risulti molto più motivante e significativo per l'allievo rispetto ad uno proposto direttamente dall'insegnante).

In alcuni casi la ricerca della dimostrazione è risultata più sofferta:

R.: «Ci sono più punti in questa circonferenza o in questa?»

F.: «Per me in questa più grande»

M.: «No, tutte due (indica con il dito la corrispondenza biunivoca, ma poi la copre con la mano). *Voglio solo vedere una cosa. Provo»*

F.: «Sì, ma se i puntini qui li fai più piccoli e qui più grandi»

M.: «Qui è diverso perché è un cerchio, questo è chiuso»

F.: «Basta farli più stretti qui»

M.: «Io volevo vedere, come avevo fatto prima. La cosa così (mostra la corrispondenza biunivoca tra i due segmenti). *Se ora facciamo la stessa cosa. Volevo vedere se può farla, solo che qui ci deve essere qualcosa, perché se anche provi… Per me sono uguali e basta»*

R.: «Se vuoi, puoi disegnare»

M.: «Questa volta è diverso perché il cerchio è chiuso. Io volevo vedere come prima avevo fatto la cosa così, se ora facciamo la stessa cosa, volevo vedere se si può fare. Solo che qui ci deve essere qualcosa, perché se anche provi. Mentre in quello là erano uno più piccolo e uno più grande, qui anche se sono uno più piccolo e uno più grande, forse è un po' difficile che sia lo stesso numero di punti, secondo me» (M. considerava un punto esterno alle due circonferenze e non riuscendo a trovare la corrispondenza biunivoca cambia idea rispetto alla convinzione che aveva inizialmente).

R.: «Perché sei partito da questo punto? Non vi viene in mente un altro punto da cui conviene partire?»

L.: «E se facciamo una linea retta?»

M.: «Ah, aspetta basta farlo in mezzo. No?»

L.: «Ma che cosa fai una croce in mezzo?»

M. costruisce la corrispondenza biunivoca, scoprendo così che ci sono lo stesso numero di punti in due circonferenze di lunghezze diverse.

Solo 4 bambini, gli stessi che dicevano che vi sono più punti nel segmento più lungo, hanno continuato a sostenere che la circonferenza più lunga è formata da un maggior numero di punti e la motivazione di questa scelta, è sempre derivata dall'idea erronea di punto matematico.

• 8 bambini spontaneamente hanno trasferito i saperi appresi in altri contesti:

M.: «È anche così e poi dal punto bisogna sempre sorpassare tutte e due, quindi hanno lo stesso numero di punti (disegna due quadrati concentrici di perimetro diverso e costruisce la corrispondenza biunivoca)»

R.: «Quindi secondo te, ci sono tanti punti in un quadratino quanti in un quadratone»

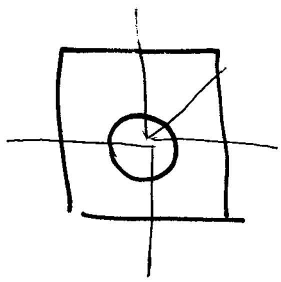
M.: «Sì, non lo sapevi? No, perché sembrava che non lo sapessi»

R.: «È che non me lo aspettavo, non pensavo che tu potessi avere una tale intuizione»

M.: «Io ne ho tante di intuizioni, è per questo che prima ho inventato la ruota» (intendendo la dimostrazione relativa alle due circonferenze concentriche)

R.: «Allora vi domando: ci sono più punti in un "cerchietto" o in un "quadratone"?»

M. disegna un "cerchietto" e un "quadratone" uno dentro l'altro, costruisce la corrispondenza biunivoca e risponde:



M.: «Sono uguali anche questi, perché sempre devono passare anche da qua, qua, qua. Sono facili però!»

• Solo con due bambini, particolarmente coinvolti e disposti al dialogo, si è continuato a domandare:

R.: «Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in una retta?» (dopo aver disegnato su un foglio un segmento e una retta disposti parallelamente)

D.: «Adesso la cosa si fa diversa! Non lo so. Proviamo»

F.: «È meglio se lo fai con il righello. Però è impossibile farlo come prima perché ci sono degli spazi vuoti qui» (indica con il dito, il fatto che il segmento è limitato da entrambe le parti)

D.: «Aiuto, come dobbiamo fare»

F.: «Per me sono uguali»

D.: «È la stessa cosa, basta collegare i punti»

F.: «Ma la retta non finisce mai, ce ne sono di più nella retta»

R.: «Quanti punti ci sono in una retta?»

D.: «Tantissimi»

F.: «Infiniti»

R.: «E nel segmento?»

D.: «Tantissimi, ma per me ce ne sono sempre di più in una retta, perché la retta continua fino all'infinito, mentre il segmento si ferma» (risulta fortissimo il misconcetto di infinito come illimitato, vedi paragrafo 3.7.1)

R.: «E se vi dicessi che ce ne sono in entrambi infiniti?»

F.: «Non ci crederei. Qua non ce ne sono infiniti (indica il segmento), *prima o poi finiscono»*

R.: «Ma prima mi avevi detto che nel segmento ci sono infiniti punti»

F.: «Per dire tantissimi»

R.: «Tantissimi? Quanti?»

F.: «Eh, cosa li devo contare?»

D.: «Lei crede di riuscirli a contare, ma non si contano perché il punto può anche essere piccolissimo, così ·» (tutto sembra sempre ricadere nel misconcetto di punto).

Il ricercatore mostra la corrispondenza biunivoca proposta da Cantor (vedi paragrafo 1.2.3).

D.: «Allora ce ne sono infiniti, qua e qua»

F.: «Allora questa retta ha gli stessi punti del segmento, perché tutte e due hanno gli stessi numeri di punti»

D.: «Quindi per ogni linea ci sono uno stesso numero di punti, perché sono tutte e due infiniti. Quindi non si possono contare»

F.: «Basta dire che il numero dei punti è sempre uguale, anche senza guardare la lunghezza, può essere uno così e uno così (indicando con le mani distanze diverse) *e si dice infinito».*

Si nota come sia presente l'uso della parola infinito, ma indagando sulle convinzioni dei bambini relative a questo argomento si rintracciano gli stessi misconcetti manifestati dagli insegnanti di scuola primaria nel paragrafo 3.7.1.

Riportiamo solo alcune risposte a mo' di esempio:

G.: «Qualcosa che non finisce mai, me l'ha detto la mia maestra. Come una pista che ha l'inizio e la fine però si può fare quante volte vuoi».

S.: «Sono le linee, le rette, le curve, le spezzate»

F.: «Tantissimi come i punti di prima»

M.: «Per me sono i numeri normali 1, 2, 3, 4… che non finiscono mai. La nostra maestra ce lo dice sempre»

I.: «È una sfera che si allarga sempre di più» (idea di infinito potenziale)

S.: «Il buio e i punti di prima»

A.: «Qualcosa che ha l'inizio, ma la maestra dice che non può avere la fine»

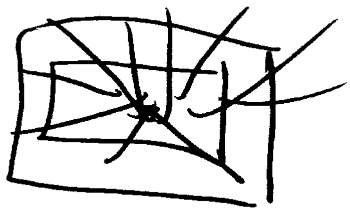
R.: «Ad esempio?»

A.: «I numeri, che non ce l'hanno la fine»

R.: «Non c'è un ultimo numero?»

A.: «L'infinito è il più lungo».

Un caso significativo. In una delle prime esperienze per testare le reazioni dei bambini prima di effettuare questa ricerca, ci siamo imbattuti in Marco, un bambino di quinta primaria di una classe diversa rispetto a quelle coinvolte nella ricerca. Dopo avergli mostrato la corrispondenza biunivoca tra due segmenti di lunghezza diversa, Marco, spontaneamente, senza neppure aver visto le due circonferenze concentriche di lunghezze diverse, realizza il seguente disegno ed afferma:
«Allora, funziona anche questo»



Certo Marco è un caso isolato, che non può essere considerato come prototipo di ciò che si verifica comunemente, ma va comunque ricordato perché ha fornito a noi ricercatori la fiducia e l'entusiasmo per affrontare questa ricerca. Da allora di Marco non ne abbiamo più incontrati, soprattutto da quando la nostra attenzione si è rivolta verso le convinzioni degli insegnanti, dove risulta assai più complicato tentare di rompere i modelli erronei che si sono creati. Nei bambini abbiamo riscontrato una grande apertura, disponibilità, elasticità, voglia di conoscere; atteggiamenti che venivano però sovente influenzati negativamente dall'insegnamento ricevuto. Frequentemente i bambini, dopo aver affermato frasi che rilevavano misconcetti, precisavano: *«Me lo ha detto la mia maestra»* e dalle interviste successive alle maestre ne abbiamo avuta la conferma, per questo ci siamo spostati sulle convinzioni degli insegnanti assai più stereotipate e rigide.

4.3 Gli enti primitivi della geometria

Uno dei filoni di ricerca che stiamo indagando riguarda le convinzioni degli allievi e degli insegnanti relative non solo all'infinito, ma anche agli enti primitivi della geometria. Questa esigenza nasce dall'aver rivelato in diverse occasioni, come trattando l'infinito si ricada spesso in misconcetti relativi al punto, alla retta …

Per raggiungere questo scopo, abbiamo scelto di sfruttare come metodologia i TEPs.: *«Intendiamo con TEPs [letteralmente: produzioni testuali autonome degli allievi]»*[41] (D'Amore e Maier, 2002); si tratta quindi di testi scritti elaborati in modo autonomo dagli studenti ed aventi come soggetto questioni matematiche. I TEPs non devono essere confusi con produzioni scritte in modo non autonomo (compiti in classe, appunti, descrizioni di procedimenti …), in quanto queste produzioni sono sottoposte a vincoli più o meno esplicitamente stabiliti, come quelli delle valutazioni dirette o indirette. Diciamo che si considerano TEPs quelle produzioni nelle quali lo studente, è messo nella condizione di volersi esprimere in modo comprensibile e con un linguaggio personale, accettando così di liberarsi da condizionamenti linguistici e di far uso invece di espressioni spontanee.

Nell'articolo di D'Amore e Maier (2002) sono elencati alcuni effetti dei TEPs, fra i quali i più interessanti risultano:

• La produzione di TEPs stimola lo studente ad analizzare e a riflettere su concetti matematici, relazioni, operazioni e procedure, ricerche e processi di problem solving con cui ha a che fare. Così ciascun allievo può raggiungere una maggiore consapevolezza ed una più profonda comprensione matematica di essi;

• I TEPs danno allo studente l'opportunità di tenere continuamente sotto controllo la propria comprensione di questioni matematiche, grazie ad un ragionato e riflessivo riscontro con l'insegnate ed i compagni di classe (autovalutazione);

• I TEPs consentono all'insegnante di valutare in modo effettivo la conoscenza personalmente costruita e la comprensione di idee matematiche, in maniera più dettagliata e profonda di

[41] La denominazione originale tedesca viene da Selter (1994).

quanto sia possibile sulla base di comuni testi scritti normalmente eseguiti come protocolli di attività di problem solving non commentati.

Per ottenere la produzione dei TEPs è necessario che lo studente dia una visione profonda, dettagliata ed esplicita del proprio modo di pensare e di comprendere la matematica, per questo bisogna fare in modo che l'allievo indirizzi i propri TEPs a qualcuno che ha bisogno di tutte le informazioni relative alla questione di cui si scrive; questo destinatario non deve ovviamente coincidere con il vuoto o con l'insegnante stesso.

I TEPs che si sono prodotti in questa ricerca sono produzioni di studenti a partire dalla scuola dell'infanzia (3 anni) fino alla scuola secondaria superiore (19 anni). Si è partiti dalla scuola dell'infanzia perché si voleva indagare se nei bambini di 3-5 anni vi fossero già idee primitive ingenue relative a questi concetti. La nostra intenzione era inoltre di osservare l'evoluzione nel tempo di queste idee; a questo scopo si sono prodotti un totale di circa 350 TEPs, distribuiti nei diversi anni. Partendo da questi TEPs, volevamo inoltre perseguire l'obiettivo di ricerca, per noi più interessante, che consiste nell'indagare le reali convinzioni degli insegnanti nei confronti di questi oggetti matematici, come conseguenza delle interpretazioni dei testi prodotti dai propri allievi. Ossia dopo aver consegnato agli insegnanti i TEPs prodotti dai propri allievi, trascritti al PC in modo che l'insegnante non potesse riconoscere le grafie, si chiedeva loro di leggerli, interpretarli e analizzarli attentamente per conto proprio. Partendo da questa analisi effettuata dagli insegnanti, iniziava l'indagine da parte dei ricercatori per valutare le convinzioni dei docenti relative agli oggetti matematici da noi proposti; questa ricerca avveniva tramite interviste, in quanto si temeva che l'uso esclusivo di risposte scritte potesse essere influenzato da fattori già riscontrati nella letteratura, quali: fretta di terminare, superficialità nella risposta, paura di una valutazione… Il TEP e l'intervista insieme, invece, specie se fatti con estrema pacatezza e senza fretta, possono mettere il soggetto a suo agio; consentendo di analizzare a fondo le competenze reali, profonde, nascoste, dei soggetti.

Allo stesso tempo era nostro scopo valutare più in generale come gli insegnanti interpretano e analizzano un TEP e qual è il loro punto di vista e la loro efficienza e competenza nelle interpretazioni.

Per ottenere i TEPs, dopo aver spiegato ai bambini che si trattava di un lavoro che non sarebbe stato base di valutazione da parte dell'insegnante, si chiedeva agli studenti, a partire dalla scuola primaria, di rispondere per iscritto alle seguenti domande:

• *Immagina di dover spiegare ad un tuo compagno che cos'è l'infinito matematico. Tu che cosa gli diresti?*

• *Come lo spiegheresti ad un compagno di tot anni?* (ai bambini di scuola primaria si chiedeva di prendere come riferimento bambini di due anni più grandi, mentre a studenti della scuola secondaria si chiedeva di prendere come riferimento bambini più piccoli)
• *Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è un punto in matematica. Tu che cosa gli diresti?*
• *Ora spiegalo ad un bambino di tot anni*
• *Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è la retta in matematica. Tu che cosa gli diresti?*
• *Ora spiegalo ad un bambino di tot anni*
• *Immagina infine di dover spiegare ad un tuo compagno che cos'è la linea in matematica. Tu che cosa gli diresti?*
• *Ora spiegalo ad un bambino di tot anni*
Nella scuola dell'infanzia si è scelto invece di fare le seguenti domande esplicite: Che cos'è per te l'infinito in matematica? Che cos'è per te un punto in matematica? Che cos'è per te la retta in matematica? Che cos'è per te la linea in matematica? Inoltre per ciascuna domanda si chiedeva ai bambini se volevano disegnare.

Non riporteremo qui i risultati di ricerca, che devono essere ancora analizzati in dettaglio, ma presenteremo solo alcune considerazioni generali. Vogliamo precisare che i protocolli originali dei bambini contengono errori grammaticali che nella traduzione potrebbero non comparire. Questi protocolli sono comunque a disposizione presso l'Autrice di chiunque voglia consultarli.

♦ I risultati avuti nella scuola dell'infanzia rivelano che bambini di 4-5 anni possiedono già le prime idee intuitive relative a questi concetti, convinzioni che possono rappresentare anche la base di futuri misconcetti. Tanto per fare un esempio la maggior parte dei bambini associa al punto matematico il segno grafico che si ottiene con la penna e risponde con frasi del tipo:

«*Sono le macchìne*» (Loris, 4 anni)
«*Sono dei puntini piccoli e grossi*» (Andrea, 5 anni)

Riportiamo alcuni esempi di risposte relative all'infinito matematico:

«È infinita linea. Che non finisce mai. L'universo è infinito. I numeri sono all'infinito» (Federico, 5 anni)

«Quando uno non smette più di fare matematica» (Riccardo, 5 anni)

Risposte relative alla retta:

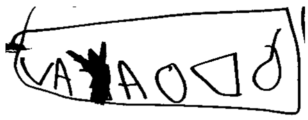
« È una riga retta» (Marco, 5 anni)

«Quando io ho fame e chiedo ai nonni da mangiare e loro non me lo danno, io devo aspettare che è cucinato (Riccardo, 5 anni)

Risposte relative alla linea:

«È una riga che divide i numeri» (Anna, 4 anni)

«La linea matematica è un metro» (Riccardo, 5 anni)



♦ A partire dalla scuola secondaria inferiore la maggior parte delle produzioni prodotte dagli studenti non ha assunto la forma di veri e propri TEPs, anche se si era scelta come motivazione quella di spiegare i diversi concetti ad un loro compagno. Gli studenti tendono infatti a rispondere in modo diretto e sintetico spesso con presunte definizioni, anche quando dovevano rivolgersi a studenti più piccoli di loro. Solo in alcuni casi, gli allievi hanno deciso di utilizzare per studenti più piccoli il disegno come forma privilegiata per capirsi, manifestando così forti misconcetti.

Questa constatazione può dipendere dal tipo di argomenti trattati, così mirati e specifici, o dalla scelta della motivazione. Per scoprirlo abbiamo intenzione di provare a cambiare la motivazione per gli studenti utilizzando la strategia che si è spesso rivelata incredibilmente coinvolgente: "Fai finta di essere un insegnante, una mamma, un bambino di tot anni…" (D'Amore e Sandri, 1996; D'Amore e Giovannoni, 1997) per vedere se cambia così l'atteggiamento e quindi le produzioni di chi scrive.

♦ Si sono rilevati forti misconcetti posseduti dagli allievi e dagli insegnanti relativi a questi oggetti matematici derivanti dalle immagini visive e dall'uso di questi termini in contesti diversi da quello matematico (da questo punto di vista rimandiamo la lettura del paragrafo 4.4). Un atteggiamento interessante che ha notevolmente sorpreso noi ricercatori è stato il rilevare che l'aver posto le domande fissando l'àmbito matematico e non quello più specifico geometrico, ha ingannato sia gli allievi che alcuni insegnanti. Cerchiamo di capire di che cosa si tratta. In Italia nella scuola di base vi è un atteggiamento assai diffuso che consiste nel creare almeno due discipline diverse all'interno della matematica: la geometria e la cosiddetta "matematica", intendendo l'aritmetica. Quando si propongono attività nella scuola primaria uno degli atteggiamenti più diffusi da parte dei bambini è quello di chiedere: *«Facciamo matematica o geometria?»*, *«Tiriamo fuori il quaderno di matematica o di geometria?»*.

Esistono quindi per gli allievi e per gli insegnanti due mondi separati; a seconda del mondo che si sceglie, si hanno comportamenti e atteggiamenti diversi: si è pronti ad effettuare calcoli se l'àmbito è quello "matematico", ci si aspetta di dover realizzare un disegno se l'àmbito è quello geometrico. Per questo alla domanda:

Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è un punto in matematica. Tu che cosa gli diresti?

I bambini forniscono risposte del tipo:

«Il punto in matematica secondo me è una cosa importante. Ma per me può significare tre cose:

a) il punto in un numero grande tipo 143.965.270.890 in un numero così i punti servono per riuscire a leggere il numero;

b) c'è qualcuno che al posto del × usa il punto esempio 144 · 5 = 620 in questa moltiplicazione il punto serve per abbreviare;

c) qualcun altro invece usa il punto come virgola, esempio 194,6 o 194.6

Secondo me il modo più utile è il numero 1» (Quinta primaria)

La maggior parte dei bambini degli ultimi anni di scuola primaria non parla di punto in senso geometrico, non ritenendolo parte della matematica, ma ricerca nell'àmbito aritmetico l'uso del punto. Invece nella scuola dell'infanzia e nei primi anni di scuola primaria, la scelta cade principalmente sull'àmbito geometrico, non essendo ancora avvenuta la distinzione tra: "matematica" e geometria come conseguenza dell'insegnamento ricevuto.

Commento dell'insegnante: *«Questo* (intendendo il bambino che ha scritto il TEP sopra riportato) *ha individuato bene il punto in matematica. Se si chiedeva in geometria era un'altra cosa, ma in matematica ha ragione lui: è questo il punto»*.

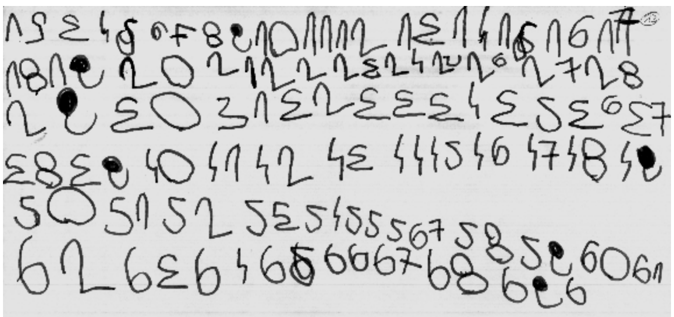
Ecco un tentativo di un bambino di unire i due àmbiti, geometrico e "matematico": *«Il punto in matematica è una piccolissima macchia che può diventare un numero molto alto»* (Quinta primaria).

Tra i pochi bambini degli ultimi anni di scuola primaria che scelgono l'àmbito geometrico, si rintracciano i soliti misconcetti più volte evidenziati: *«Gli direi che il punto è un'elemento piccolo, rotondo, d'inizio e fine a una retta»* (Quinta primaria).
Commento dell'insegnante: *«Se intende il punto della geometria, allora va bene quello che dice, l'ha spiegato nei dettagli, ma la domanda riguardava il punto in matematica»*, rivelando così misconcezioni relative al punto e distorte idee relative alla matematica.
E così la retta dovendo rientrare in àmbito aritmetico diventa: *«La linea dei numeri»* e la linea diventa: *«Un simbolo che si usa nelle operazioni o nelle frazioni»*.
Queste considerazioni rendono a nostro parere fondamentale, dal punto di vista didattico, l'importanza del contesto che sarà trattato nel paragrafo 4.4.

♦ Nei TEPs prodotti dagli studenti non si nota un'evoluzione negli anni di ciò che si intende per infinito matematico: le misconcezioni rimangono sempre le stesse individuate per gli insegnanti nel paragrafo 3.7.1. Diamone solo alcuni esempi:

«Sono gli angiolini che vivono per sempre» (Prima primaria)

«Mi è venuto in mente i numeri» (Prima primaria)



«I lavori difficili come fare 60 schede in un giorno» (Seconda primaria)

«Per me l'infinito matematico e un'infinito di numeri e problemi da risolvere. io non sono molto bravo cuindi per me non finisce mai» (Terza primaria).

«Per me l'infinito in matematica non c'è, perché i numeri in matematica non iniziano e non finiscono mai» (Quarta primaria)

«Secondo me l'infinito matematico è come lo spazio, che non finisce mai, i numeri non possono finire, le combinazioni dei numeri non possono finire. Però secondo me le caratteristiche dell'infinito matematico non sono solo numeri, possono essere anche forme, noi conosciamo alcune delle tantissime forme geometriche. L'infinità della matematica è difficile da spiegare perché la matematica c'è dappertutto anche solamente per calcolare la profondità di un quadro bisogna usare la matematica, per vedere quanto è grande un'aula bisogna calcolare il perimetro o l'area.
Una cosa che mi sono sempre chiesta è: ma chi è che ha le prove che la matematica è infinita? Io lo so bene che è infinita ma si hanno delle prove?» (Quinta primaria)

«Una cosa che continua sempre, arriva lontanissimo» (Prima media)

«Mi dispiace ma nessuno mi ha mai insegnato cos'è l'infinito, penso però che sia un qualcosa di cui non si sa la quantità ben definita» (Seconda media)

«L'infinito è qualcosa che non ha fine, ad es. i numeri, dopo quello che tu pensi sia l'ultimo ce ne sempre un altro e puoi arrivare a contare senza fine (ossia all'infinito)» (Terza media)

«Direi che è il nulla ma allo stesso tempo è tutto. Per questo non è possibile immaginarlo» (Prima liceo)

«L'infinito in matematica è un insieme indeterminato, come quello dei numeri naturali o dei punti di una lettera» (Seconda Liceo)

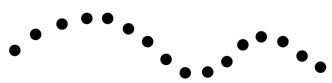
«È un insieme i cui elementi non sono numerabili» (Terza liceo)

«Infinito, ampio concetto nell'ambito matematico che costituisce un limite concettuale» (Quarta liceo)

«Pensa il numero più grande che tu possa pensare. Immagina di superarlo e farlo crescere finché puoi: quel numero tende all'infinito» (Quinta liceo)

♦ I TEPs prodotti al liceo per gli enti primitivi sono basati principalmente sull'uso di presunte "definizioni" proposte o accettate dall'insegnante, che spesso però non hanno un vero e proprio significato dal punto di vista matematico oppure, pur avendolo, non sono realmente interiorizzate ed accettate dagli allievi.
Ecco qualche esempio:
«Il punto è un ente geometrico appartenente ad un insieme definito come spazio. Si indica con le lettere maiuscole» (Seconda Liceo Scientifico)
Non vi è una vera esplicitazione delle caratteristiche specifiche del punto matematico; nella prima parte di questa affermazione potrebbero rientrare la retta, il piano…; eppure l'insegnante commenta in questo modo: *«Questa mi sembra una definizione accettabile di punto, per me si capisce che ha inteso che cos'è»*.

Un altro esempio:
«La linea è un insieme infinito di punti» (Seconda Liceo Scientifico)
Commento dell'insegnante: *«Questa non va bene, io non la accetterei perché non dice come sono messi i punti»*, ritenendola quindi un'affermazione incompleta.
Invece per questa: *«Direi che è un insieme infinito di punti non necessariamente allineati»* (Seconda Liceo Scientifico) l'insegnante commenta in questo modo: *«Questa va bene, è quella che c'è scritta nel libro e che ho fatto scrivere nel quaderno. Io accetto questa, perché fa capire che i punti possono non essere messi allineati»*. Eppure questo modo di concepire la linea, può far pensare addirittura ad un piano o a punti disposti in questo modo:



Ancora: *«La retta è un insieme di punti uniti l'uno con l'altro in modo da stare diritti»* (Seconda Liceo Scientifico)

Commento dell'insegnante: *«Questa per me va bene, la accetterei perché si vede che ha capito che cosa si intende per retta, anche se usa termini un po' impropri»*. Da questo modo di concepire la retta, risulta lampante il cosiddetto "modello della collana" già più volte citato.

Terminiamo qui le considerazioni che potrebbero in realtà continuare ancora a lungo; il nostro scopo in questa tesi era semplicemente di sottolineare come i TEPs stanno rappresentando per noi ricercatori uno strumento importante per ottenere informazioni dettagliate sulle conoscenze e sulla comprensione dei concetti matematici da parte degli allievi e degli insegnanti. Sarà nostra intenzione pubblicare prima possibile i risultati di questa ricerca.

4.4. La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti

4.4.1 Da dove nasce l'idea del punto nei diversi àmbiti

In seguito al corso di formazione realizzato con gli insegnanti di Milano e alla ricerca in corso sugli enti primitivi della geometria, sono nati forti spunti di riflessione che hanno spinto l'analisi in varie direzioni: una di queste riguarda il punto nei diversi àmbiti. Partendo dal misconcetto di *dipendenza* (vedi paragrafo 3.3), che inizialmente gli insegnanti coinvolti avevano manifestato di possedere, in base al quale vi sono più punti in un segmento più lungo rispetto ad uno più corto, si è potuto mettere in evidenza come vi sia una grande influenza del modello figurale che in questo caso condiziona negativamente la risposta del tipo: a maggior lunghezza deve corrispondere un maggior numero di punti. Questo fenomeno è legato all'idea di retta vista secondo il "modello della collana" (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002), che viene proposto dagli insegnanti come modello adatto per rappresentare mentalmente i punti sulla retta.

È proprio in questo modello che si possono rileggere diverse convinzioni degli allievi e degli insegnanti legate all'idea di punto come ente avente una certa dimensione, anche se molto piccola; convinzione derivante dalla rappresentazione che viene comunemente fornita del punto (su questo specifico argomento rimandiamo alla lettura del paragrafo 4.5) e che condiziona l'immagine che si ha di questo oggetto matematico.

Come abbiamo potuto mostrare dai TEPs raccolti durante il lavoro di ricerca relativo agli enti primitivi della geometria, riportati nel paragrafo precedente, le idee che manifestano gli allievi di punto a qualsiasi età sono spesso legate ad un segno grafico lasciato dalla matita o all'idea di punto che ritrovano in contesti diversi, a volte lontani dal mondo della matematica, che tendono a trasferire direttamente anche in questo àmbito:

«Un punto in matematica è un punto con dentro dei numeri» (Prima primaria)
«Io penso che il punto matematico sia un punto che fa finire una frase matematica anche per fare finire i numeri» (Terza primaria)

«Non si sa ancora bene che cos'è un punto però per me è solo un punto su un foglio che può essere di diverse dimensioni» (Quarta primaria)

«Il punto in matematica è un segnetto così · oppure è la questione da risolvere.
Il punto in matematica è anche quello che si mette sopra certi numeri es 1˙000.
Nelle calcolatrici il punto viene considerato una virgola.
*Il punto può essere anche per le equazioni es 100 ×…= 200» (*Quinta primaria)

«Un punto in matematica è importante per poter prendere un voto per essere felici» (Prima media)

«Il punto in geometria è il punto di riferimento di una figura» (Seconda media)

«È un punto rotondo che forma le linee» (Terza media)

«Il punto è una parte di piano indeterminato, perché può avere varie dimensioni, che costituisce l'inizio, la fine o entrambi di un segmento, una retta etc» (Terza media)

«Un punto è un piccolo segno ed è un ente geometrico fondamentale» (Prima liceo scientifico)

«Un punto è l'elemento più piccolo preso in considerazione» (Seconda liceo scientifico)

«Un punto è un elemento geometrico, il più piccolo immaginabile tendente a 0. tra due punti ce n'è sempre un terzo» (Terza liceo scientifico)

«Un punto minimo ·» (Quarta liceo scientifico)

« • ⟵ questo è un punto» (Quinta liceo scientifico)

«Un luogo geometrico infinitamente piccolo che, collocato in un piano cartesiano, possiede 2 coordinate (x, y)» (Quinta liceo scientifico)

Come abbiamo rilevato nel paragrafo 4.3, queste idee in alcuni casi sono accettate e addirittura condivise dagli insegnanti dei diversi ordini scolastici. (Per quanto riguarda l'idea di punto manifestata dagli insegnanti di scuola primaria rimandiamo anche alla lettura del paragrafo 3.7.2).

Perché queste convinzioni non siano la base di modelli scorretti posseduti da insegnanti e da allievi, occorre aiutare il soggetto a staccarsi dal modello del segmento come "collana" e da visioni distorte degli enti primitivi della geometria, creando immagini più opportune che consentano ad esempio di concepire punti senza spessore. Per far questo, bisogna far sì che il soggetto varchi il confine della propria conoscenza precedente, per costruire una nuova conoscenza. Le domande che ci siamo posti sono state le seguenti: Quando deve essere proposta questa nuova conoscenza e in che modo? Quale direzione occorre seguire nel proporla? Dove si annidano maggiormente le difficoltà per l'apprendimento di questi "delicati" oggetti matematici?

4.4.2 Il quadro teorico di riferimento

Le affermazioni degli insegnanti e degli allievi ci hanno indotto a mettere in evidenza l'importanza del contesto, seguendo un approccio situazionista e socio-culturale del costruttivismo sociale. In quest'ottica il sapere, in particolare il sapere matematico, deve:

- essere il prodotto della costruzione attiva dell'allievo (Brousseau, 1986);
- avere le caratteristiche di essere situato, cioè riferito ad un preciso contesto sociale e culturale, pur restando sempre in relazione ad altri contesti;
- essere il frutto di particolari forme di collaborazione e negoziazione sociale (Brousseau, 1986);
- essere usato e ulteriormente ridefinito in altri contesti sociali e culturali (Jonnasen, 1994).

Facendo queste considerazioni ci siamo inseriti all'interno di una visione "antropologica" che punta tutta l'attenzione sul soggetto che apprende (D'Amore, 2001a; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003), anziché sulla disciplina, privilegiando il "rapporto e l'uso del sapere", piuttosto che il "sapere"; impostazione che contempla la scelta di una filosofia a monte di stampo pragmatica (D'Amore, 2003). È in effetti l'"uso" che condiziona la significatività e quindi il valore di un dato contenuto che in questo caso abbiamo scelto che coinvolga il punto nei diversi àmbiti, ma che ovviamente può essere generalizzato per tutti gli enti primitivi della geometria, e non solo. In quest'ottica, abbiamo sentito con forza l'importanza che dovrebbe avere nell'insegnamento un'attenzione specifica ai diversi contesti e alle diverse forme di "usi" di un sapere che determinano il significato degli oggetti.
In effetti, all'interno della teoria pragmatica da noi scelta come quadro di analisi possibile, le espressioni linguistiche, i singoli termini, i concetti, le strategie per risolvere un problema… hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano, per questo vanno opportunamente decodificate, interpretate, selezionate e gestite dall'allievo. Come riferisce D'Amore (2003) risulta impossibile all'interno di questa teoria ogni osservazione scientifica in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può quindi far altro che esaminare i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti. Questo però, a nostro parere, non deve voler dire che l'insegnante possa lasciare l'apprendimento solamente ad un atto di intuizione o ad una semplice interpretazione personale dell'allievo, soprattutto in àmbito matematico dove si rischia che l'immagine intuitiva dell'allievo si trasformi in modello parassita (D'Amore, 1999), come abbiamo potuto percepire nell'intera trattazione di questa tesi. Come riferisce D'Amore (2003): *«Una delle difficoltà è che all'idea di "concetto" partecipano tanti fattori e tante cause; per dirla in breve, e dunque in modo incompleto, non pare corretto affermare per esempio che "il concetto di retta" (supposto che esista)* (l'esempio è generalizzabile ovviamente anche per il punto) *è quello che risiede nella mente degli scienziati che a questo argomento hanno dedicato la loro vita di studio e riflessione; sembra più corretto affermare invece che vi sia una forte componente per così dire "antropologica" che mette in evidenza l'importanza delle relazioni tra $R_I(X,O)$ [rapporto istituzionale a quell'oggetto del sapere] e $R(X,O)$ [rapporto personale a quell'oggetto del sapere]* (in questo caso D'Amore fa esplicito riferimento a simboli e termini tratti da Chevallard, 1992)*… Dunque, nella direzione che ho voluto prendere, alla "costruzione" di un "concetto" parteciperebbe tanto la parte istituzionale (il Sapere) quanto la parte personale (di chiunque abbia accesso a tale Sapere, quindi anche l'allievo non solo lo scienziato)».*

Ma che cosa succede tradizionalmente per gli enti primitivi della geometria? In particolare per il punto e per la retta? La sensazione è che per questi oggetti matematici tutto venga lasciato semplicemente all'aspetto "personale", affidandoli solitamente ad un semplice atto di intuizione.[42]

Questo atteggiamento però rischia di radicare nella mente degli allievi modelli parassiti come il cosiddetto "modello della collana" che vincola l'apprendimento matematico successivo, facendo prevalere l'aspetto figurale su quello concettuale (Fischbein, 1993) e facendo nascere idee intuitive distorte che continuano a scontrarsi durante l'intera carriera scolastica, e non solo, con gli altri saperi. Riteniamo invece didatticamente importante seguire un approccio pragmatico, con una costante mediazione da parte dell'insegnante per far sì che gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti non rimangano solo "personali" ma diventino "istituzionali" (Chevallard, 1992; D'Amore 2001a, 2003; Godino e Batanero, 1994). Per raggiungere questo fine però, l'insegnante deve essere a conoscenza dell'aspetto "istituzionale" del sapere ma questo, come abbiamo potuto rilevare nel paragrafo precedente, non avviene nel caso degli enti primitivi della geometria. Ancora una volta si nota come la scelta di lasciare gli enti primitivi solamente all'aspetto "personale", non è una scelta didattica consapevole, mirata ad aggirare questioni assai delicate legate al tentativo di "definire" tali oggetti, ma deriva dall'accettazione passiva di misconcetti consolidati che si sono trasformati in modelli erronei posseduti dagli insegnanti stessi. G.: «*Sono trent'anni che dico ai miei bambini che il punto è quello che si disegna con la matita, non potrò cambiare adesso. E poi ritengo che sia proprio questo il vero significato di punto. Perché, non è più così?*» (Insegnante di scuola primaria). Curiosa è la domanda posta dell'insegnante G.: «*Perché, non è più così?*», che mette in evidenza non solo false convinzioni legate all'idea di punto, ma anche personali credenze relative all'idea di matematica [sulla visione personale degli insegnanti e sulle loro "filosofie implicite" si veda Speranza (1992), sui credi ideologici invece rimandiamo a Porlán et al., 1996)]. Pare che l'idea che l'insegnante possiede di

[42] In Borga et al. (1985) viene messo in evidenza come già Pasch nel 1882, espresse chiaramente l'opportunità di evitare ogni appello al significato dei concetti geometrici per fare riferimento solo alle mutue relazioni fra di essi esplicitamente formulate tramite assiomi. All'opera di Pasch si ricollegano, non solo idealmente, i contributi di Peano dedicati ai fondamenti della geometria elementare. Si arriva a concepire un sistema ipotetico-deduttivo in cui i concetti primitivi, in linea di principio privi di significato, si ritengono definiti implicitamente dagli assiomi. Proprio a questo si riferisce Bertrand Russel quando afferma la seguente definizione paradossale: «*Le matematiche sono quella scienza,in cui non si sa di che cosa si parla e in cui non si sa se quello che si dice sia vero*» (Enriques, 1971).

matematica coincide esattamente con la *trasposizione didattica* del sapere matematico che solitamente viene proposta dalla *noosfera* (vedi paragrafo 2.4). Non vi è quindi distinzione per l'insegnante G. tra un concetto matematico e la sua trasposizione scaturita da una particolare scelta didattica: i due aspetti rappresentano per lui un tutt'uno.

La direzione che auspichiamo che gli insegnanti adottino, per sé e per i propri allievi, segue quindi un'impostazione "pragmatica" dove non ha più molto interesse la nozione di significato di un oggetto (di conoscenza, in generale, matematico, in particolare) quanto piuttosto quella di rapporto, "relazione all'oggetto", che deve rimanere però coerente con le basi della disciplina di riferimento. È da oltre 2000 anni che i matematici hanno fatto la proposta linguistica di far usare semplicemente parole come "punto", "linea", "retta", "superficie", "piano", "spazio" senza definirle esplicitamente, ipotizzando che più o meno tutti coloro che le usano (bambini compresi) abbiano un'idea di che cosa significano: si apprenderà semplicemente che cosa sono, appunto, usandole. Ma si può ritenere vincente questa scelta, dopo aver analizzato le affermazioni degli allievi e soprattutto quelle degli insegnanti? Per non creare forti fraintendimenti come quelli rivelati in questi capitoli, occorre innanzitutto che l'insegnante sia a conoscenza del significato "istituzionale" dell'oggetto matematico che intende definire implicitamente, in secondo luogo deve indirizzare l'uso di questi oggetti in modo consapevole e critico per far sì che questo uso rimanga coerente rispetto alla disciplina di riferimento.

In questa direzione rientrano anche le considerazioni riportate in Fischbein (1993): «*Uno studente di scuola superiore dovrebbe essere reso consapevole del conflitto e della sua origine, per dare rilievo nella sua mente alla necessità di basarsi nei ragionamenti matematici soprattutto sui limiti formali. Tutto ciò porta alla conclusione che il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non deve essere considerato un effetto spontaneo degli usuali corsi di geometria. L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali, non è un processo naturale. Ciò dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante*». Queste considerazioni di Fischbein riferite ad allievi di scuola superiore dovrebbero a nostro parere essere trasferite ad ogni livello scolastico, anzi riteniamo indispensabile che gli insegnanti possiedano questa attenzione didattica fin dalla scuola primaria.

In una quarta primaria di Rescaldina (MI) dopo aver chiesto ai bambini: «*Quanto è grande un punto matematico?*», si sono avute le seguenti risposte: «*Un punto può essere grande dal tipo*

di pennarello perché è di tante misure»; «Per me il punto può essere una cosa grandissima o microscopico perché è come un cerchio di diverse misure»; «Dipende da come lo costruisci»; «Secondo me il punto è grande in base a cosa lo riferisci. Se lo riferisci a un atomo è grandissimo. Se lo riferisci ad un armadio è piccolissimo».
Inoltre, dalla domanda: *«Quanti punti ci sono in un piano?»* si sono avute le seguenti risposte: *«Dipende se i puntini sono vicini ce ne possono essere 100, anche di più»; «Dipende da quanti ne vogliamo fare noi, possiamo farli vicinissimi e diventano tantissimi. Se li vogliamo fare distanti sono pochi»; «Per me dipende dal piano, più grande è e più punti ci possono stare»; «Secondo me possono essere infiniti, in questo piano ce ne possono stare infiniti, perché un puntino trova sempre uno spazio»; «Nessun piano è fatto da punti, questo foglio è stato stampato intero, non da puntini»; «Secondo me questi puntini possono essere di più se il piano è grande, dipende anche da come li disegniamo. Può essere solo uno grande e tantissimi piccoli».*

Da tutte queste riflessioni, è scaturita la consapevolezza della necessità di non dare per scontate le idee che possono avere, sia gli insegnanti che gli allievi, di infinito e degli enti primitivi della geometria, e soprattutto, che è didatticamente necessario indirizzarle verso l'aspetto "istituzionale", mostrando le proprietà che li caratterizzano e i rapporti che li mettono in relazione tra loro.
Inoltre riteniamo fondamentale mettere in risalto durante l'insegnamento a partire dalla scuola primaria diversi aspetti tra i quali: l'importanza dei diversi contesti che è legata ai diversi "usi" del sapere da parte dell'allievo. È quindi emersa l'esigenza per gli insegnanti che avevano affrontato il corso di formazione, di strutturare insieme ai ricercatori attività da mettere in pratica con i propri allievi. Sono così nate interessanti proposte, tutte legate a questo tema, finalizzate ai bambini di scuola primaria e scuola secondaria inferiore. Si è partiti da questi livelli scolastici in quanto, dai risultati riportati, emerge chiaramente come siano già presenti in bambini di scuola primaria misconcetti sui diversi enti geometrici; idee ingenue che risultano molto spesso legate a contesti diversi, ma che vengono trasferiti con disinvoltura anche in àmbito matematico soprattutto a causa di una analogia linguistica.
Le finalità educative e didattiche che ci siamo posti nello strutturare con gli insegnanti le attività, non si riducono all'acquisizione di conoscenze, abilità e competenze da parte degli studenti, bensì mirano all'"uso" del sapere da parte di ciascuno. Si tratta quindi non solo di far imparare, ma anche di far saper gestire il proprio sapere da parte degli allievi e di consentire di fare le scelte opportune di fronte ad una complessità di informazioni o ad un evento

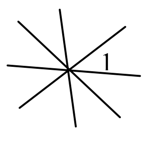
problematico. Tutto ciò, in linea con le parole di Gardner (1993): *«Uno degli obiettivi base dell'educare al comprendere o insegnare al comprendere è: formare la capacità del bambino a trasferire ed applicare la conoscenza acquisita a più situazioni e a più contesti».*

A proposito dei diversi contesti, già messi in evidenza dai TEPs degli allievi, per quanto riguarda in particolare il punto, basta cercare in un qualsiasi dizionario, come ad esempio il "Grande dizionario della lingua italiana" edito dalla UTET, per trovare per la parola "punto" circa 40 significati diversi; inoltre se si guardano le locuzioni, le espressioni d'uso corrente, è possibile rintracciare per questo termine per lo meno 200 contesti d'uso diversi. Ovviamente tra questi significati vi è anche quello di punto matematico, ma questo didatticamente di solito viene lasciato all'intuizione o viene affrontato tardi e con poca attenzione rispetto agli altri usi, provocando così una sedimentazione esclusiva degli altri significati.

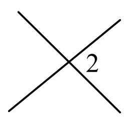
In effetti, nella scuola di base, di solito non si mette in evidenza la differenza che c'è tra il punto matematico e il punto negli altri contesti (come quello figurale); questo fa sì che, quando finalmente il punto alle scuole superiori viene affrontato in un senso matematico più sofisticato, per gli allievi risulta troppo tardi: gli altri significati hanno preso il sopravvento, diventando così inaccettabile l'idea di un nuovo significato che contraddice quelli fino ad allora sedimentati (richiamiamo la distinzione tra immagine e modello riportata nel paragrafo 2.2).

4.4.3 Una provocazione

Nell'articolo: *"La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti"* (Sbaragli, 2003b) abbiamo iniziato la trattazione con una provocazione che è risultata per noi molto significativa. Si chiede inizialmente al lettore di osservare le due figure qui sotto rappresentate e di rispondere alle seguenti domande tratte dal fondamentale lavoro sui concetti figurali di Fischbein (1993):



3a



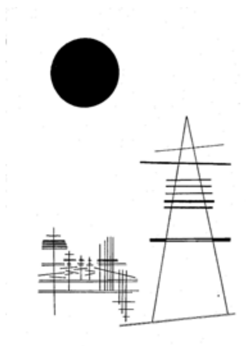
3b

«In 3a ci sono quattro linee che si intersecano (punto 1). In 3b, ci sono due linee che si intersecano (punto 2). Confronta i due punti 1 e 2. Questi due punti sono diversi? Uno di loro è più grande? Se sì, quale? Uno di loro è più pesante? Se sì, quale? I due punti hanno la stessa forma?»

Si continua poi, con diverse riflessioni e provocazioni del tipo:
- nel rispondere alle domande precedenti, chissà a quale contesto avrà pensato il nostro lettore.

- che cosa avrebbe risposto a queste sollecitazioni Seurat, pittore "puntinista"? Per Seurat il punto sarà stato concepito come un concetto astratto oppure avrà assunto grande importanza la dimensione del punto? Possiamo affermare che Seurat non è riuscito a "concettualizzare"[43] nel senso inteso da Fischbein? Riflettiamo sull'effetto che farebbe il seguente quadro di Seurat se fosse "rappresentato" concependo il punto solo come posizione, privo di dimensione.

- che cosa potrebbe pensare Kandinsky (1989) delle domande poste da Fischbein, dato che ha intitolato un suo quadro: *"Le linee sottili tengono testa alla pesantezza del punto"*?



- che cosa penseranno gli aborigeni australiani del punto dato che lo usano come base per rappresentare ogni immagine?

[43] Siamo consapevoli che stiamo usando in modo molto semplicistico un termine: *concettualizzazione*, assai complesso e delicato: «*Addentrarsi in questa avventura, conduce a rendersi conto almeno di una cosa: che la domanda: Che cos'è o come avviene la concettualizzazione? Resta fondamentalmente un mistero…*» (D'Amore, 2003). Questa scelta consapevole, nasce dall'uso di questo termine da parte di Fischbein (1993) nell'esempio del punto individuato dall'intersezione di più segmenti, che noi abbiamo trasferito nelle nostre considerazioni.

- inoltre si riporta la risposta fornita da un agrimensore di "vecchio stampo" con oltre 40 anni di professione alle domande poste da Fischbein: *«È ovvio che un punto è… un punto, ma nel disegno cambia a seconda di quale pennino usi e così un punto può diventare più grosso o meno grosso. Se usi pennini diversi o se ripassi con un numero sempre maggiore di linee il punto visivamente diventa più grosso»*. E ci si chiede se l'agrimensore non ha ancora concettualizzato o se la concettualizzazione dipende invece dal contesto.

Queste provocazioni consentono di riflettere sull'importanza del contesto, che risulta ancora più lampante grazie all'attenta analisi dell'articolo sopra citato di Fischbein (1993), dove viene presentata la situazione sperimentale dei due punti: uno individuato dall'intersezione di quattro segmenti e l'altro di due segmenti. Questa ricerca è stata rivolta a soggetti di età compresa tra i 6 e gli 11 anni, ai quali erano state poste le domande, volutamente ambigue, che abbiamo presentato. Fischbein stesso afferma che queste domande potevano essere considerate o da un punto di vista geometrico o da un punto di vista materiale (grafico). L'intenzione della ricerca era di scoprire l'evoluzione con l'età dell'interpretazione dei soggetti e la possibile apparizione dei concetti figurali (punto, linea).
Come riferisce Fischbein, i risultati mostrano un'evoluzione relativamente sistematica delle risposte da una rappresentazione concreta ad una concettuale-astratta. Ma siamo certi che l'interpretazione concettuale sia esclusivamente quella astratta, o questo dipende dal contesto? È certo che in àmbito matematico la concettualizzazione del punto si ha quando si è in grado di astrarre e di concepire un punto come privo di dimensioni, ma nella domanda non si è parlato di punto matematico, quindi l'attenzione poteva concentrarsi su un qualsiasi tipo di punto: per l'agrimensore, per il pittore, per l'aborigeno, per il disegnatore, per il musicista, per il geografo... A nostro parere un agrimensore di "vecchio stampo" abituato a disegnare con i pennini che non sia in grado di distinguere la diversa grossezza di un punto, fatto ad esempio con un pennino 0,2 o 0,8, non è riuscito a concettualizzare nel suo àmbito. La concettualizzazione quindi dipende dal contesto, per questo riteniamo che nella esplicitazione della domanda posta da Fischbein risultava fondamentale chiarire l'àmbito di riferimento.
Viene lecito domandarsi: è sempre vero che la percezione grafica sia meno concettuale di quella astratta o questo dipende dal contesto di riferimento? In particolari àmbiti, come quello grafico, l'aspetto figurale può essere ritenuto più concettuale di quello astratto? A nostro parere, notare la diversa dimensione di due punti, richiede una sensibilità, una finezza e un grado di "concettualizzazione" fondamentale in certi àmbiti. Emerge quindi la necessità che l'insegnante sia consapevole del contesto al quale sta facendo riferimento quando pone le

domande e quando propone un particolare contesto all'allievo, per essere certi che le risposte inattese ed insperate degli studenti, non siano il risultato derivante dal fatto che l'intervistato si sia collocato in un àmbito diverso rispetto a quello immaginato dall'intervistatore. In un certo senso sarebbe come auspicare che vengano fornite le soluzione di un'equazione in un particolare insieme, senza però avere esplicitato l'insieme di appartenenza delle soluzioni.
Da questo punto di vista potrebbe risultare pericoloso, se generalizzato ad ogni àmbito, ciò che auspica Fischbein (1993), ossia che il punto stia per diventare staccato dal contesto, così da preparare il concetto geometrico di punto. In effetti riteniamo importante che l'allievo sia consapevole del contesto nel quale si sta muovendo e che concepisca un concetto coerentemente rispetto al particolare àmbito, allo stesso tempo auspichiamo che l'allievo sappia variarne l'"uso" all'interno dello stesso contesto e in contesti diversi.

Ritornando all'infinito. Quando il ricercatore, seppur conosciuto come esperto di matematica, ha rivolto agli insegnanti di matematica la seguente domanda priva di contesto: ***R.: «Che cos'è per te l'infinito?»*** ha riscontrato risposte del tipo seguente, tutte rivolte ad àmbiti diversi da quelli della matematica:
A.: «L'infinito di Leopardi» (insegnante di scuola primaria)
F.: «Lo spazio, anzi l'universo che ci circonda» (insegnante di scuola primaria)
C.: «Il tuo indirizzo di posta elettronica» (insegnante di scuola primaria)
G.: «L'infinito amore che provo per mia figlia» (insegnante di scuola secondaria inferiore)
A.: «La fede in Dio che mi porto dentro» (insegnante di scuola secondaria inferiore)
È certamente vero che per l'infinito, anche quando si esplicita agli insegnanti il contesto al quale ci si riferisce, ossia quello matematico, non si hanno risposte coerenti rispetto all'àmbito considerato (vedi paragrafo 3.7.1), ma almeno si escludono, nella maggior parte dei casi, risposte generiche e lontane dalle aspettative come quelle qui sopra evidenziate.
Le considerazioni riferite al punto nei diversi àmbiti si potrebbero trasferire durante l'iter scolastico degli allievi anche all'infinito, esplicitando le diverse caratteristiche di questo termine nei diversi contesti: filosofico, religioso, mistico, linguistico, matematico…

Di nuovo al punto. Come conseguenza di queste considerazioni si sono strutturate diverse attività relative al punto nei diversi àmbiti che gli insegnanti di Milano stanno sperimentando con bambini di scuola primaria. La sperimentazione che si sta realizzando, sfocerà in seguito in una vera e propria ricerca, in quanto l'intenzione futura è di raccogliere i risultati di anni di lavoro in questo campo, osservando la ricaduta didattica derivante da questa "nuova" trasposizione didattica. Cercheremo quindi di analizzare come si sono trasformati i misconcetti degli insegnanti e dei bambini, quali immagini avranno dei diversi concetti matematici, in particolare dell'infinito matematico e degli enti fondamentali della geometria, quale sarà a quel "punto" la loro idea di matematica. Non ci dilungheremo nella trattazione specifica di queste attività, in quanto non è questa la sede giusta, vogliamo solo mettere in evidenza la linea scelta che si basa sull'"uso" della parola punto in diversi contesti: nella musica, nella lingua, nella geografia, nell'arte, nel disegno, nella matematica, analizzando in dettaglio ciò che caratterizza ogni contesto. Per esempio se parliamo della pittura facciamo notare che si tratta di un punto con caratteristiche particolari come la grandezza, la forma, la pesantezza, il colore… che dipendono dagli strumenti con cui si è disegnato; si tratta di un punto che assume significato diverso a seconda di ciò che l'artista vuole esprimere. Entrando nel mondo della matematica, invece, si può riflettere e discutere sulla scelta di Euclide relativa al punto privo di dimensione, che è stata assunta da questo matematico come "punto" di partenza, "regola iniziale" del grande gioco della matematica al quale si invitano i bambini a partecipare. Ma come in ogni gioco che si rispetti, per partecipare è necessario accettarne e rispettarne "le regole", che condurranno in questo caso a saper "vedere con gli occhi della mente". La capacità di saper accettare, rispettare e condividere le scelte degli altri e l'esplicitazione delle caratteristiche dei diversi àmbiti, rappresentano per questa trattazione elementi fondamentali per poter consentire ai bambini di staccarsi dalla fisicità dei punti che solitamente disegnano, per accettare un mondo diverso, quello della matematica, dove esistono "regole" differenti da quelle della loro quotidianità.

Entrare nel mondo della matematica, accettandone le "regole" del gioco, rappresenta uno dei primi obiettivi che perseguiamo anche nei corsi di formazione di matematica per insegnanti di ogni livello scolastico, allo scopo di far sì che sia possibile poi accettare la problematica dell'infinito, assai distante rispetto a quella del finito. Abbiamo in effetti rivelato in questi anni come sia necessario effettuare un discorso più ampio, che ricada più in generale sull'idea che hanno gli insegnanti di matematica, prima di giungere a lavorare sui loro misconcetti relativi all'infinito.

G.:«Adesso ho capito che cos'è la matematica, ormai non mi sorprende più niente» (insegnante di scuola primaria).

Dato che questa tesi è rivolta agli insegnanti, vogliamo mettere in evidenza l'importanza che ha avuto per loro strutturare insieme a noi le attività, riflettendo sul ruolo fondamentale di queste considerazioni sul loro insegnamento. Solo come esempio riportiamo due stralci del "diario di bordo", contenente le sensazioni di due insegnanti di scuola primaria:

L.: «Noi insegnanti elementari siamo abili costruttori di tecniche e di materiali didattici che destano anche ammirazione per la loro ingegnosità. Ma qualche volta ci innamoriamo troppo dei nostri "marchingegni" e ci abbandoniamo al loro uso in modo troppo fiducioso. È vero, abbiamo bisogno di modelli per parlare di matematica, abbiamo alunni piccoli, per i quali pensiamo sia sempre necessario una materializzazione dei concetti. Così non ci accorgiamo dell'inganno (non voluto) nel quale avvolgiamo i nostri alunni che attraverso la nostra didattica materiale si fanno l'idea che gli oggetti matematici siano oggetti reali e come tali debbano essere trattati. Anch'io nella mia storia di insegnante elementare ho attraversato la stagione della didattica materiale e ho speso tempo ed energia per renderla sempre più efficiente. Ma ad un certo momento nella mia vita di maestra, mi sono accorta che il manipolare, il fare, il costruire, non portavano necessariamente al sapere matematico. (…). Finalmente ho capito che se il concetto non c'è nella mente, se non c'è capacità di immaginazione, le mani che manipolano non servono al fine di costruire concetti matematici. (…). Ero soddisfatta e mi pareva che tutto funzionasse al meglio. Era solo un'impressione, dovuta alla mia ignoranza matematica: non mi colpevolizzo, faccio una constatazione.

Due anni fa al convegno di Castel San Pietro ho sentito Silvia Sbaragli parlare di infinito matematico: infinito potenziale e attuale: mi si è aperto un mondo. Silvia Sbaragli parlava e io rivedevo me stessa insegnante di matematica: quante cose date per scontate e quante confusioni.

Avevo arato bene il mio terreno didattico ed ero in grado di cogliere immediatamente il messaggio che contenevano le parole della relatrice: un pensiero ricco e fertile al momento giusto.

Si è creato un incontro assolutamente importante per la mia pratica di insegnante: da lì è nata una collaborazione che ha illuminato e illumina il mio lavoro (…) favorendo in modo potente una organizzazione delle mie idee ancora frammentate, confuse e incomplete.

Ho capito una volta per tutte qual è l'approccio giusto per fare matematica. Ho cercato di illuminare i miei bambini nello stesso modo in cui sono stata illuminata io: credo di esserci riuscita. Sono felice di questa trasformazione che mi ha consentito di affacciarmi al mondo della matematica con uno sguardo che non cancella in un colpo la mia ignoranza, ma che non mi farà commettere gravi sbagli e omissioni nei confronti dei miei alunni, che permetterà ai miei alunni e a me di godere di un sapere così ricco nel quale e con il quale la mente umana può giocare e divertirsi».

C.: «Riconosco che molte volte pensando di facilitare l'apprendimento e di rispondere alla richiesta di chiarezza concreta da parte degli alunni, agevoliamo invece il nostro bisogno di sicurezza cercando un contatto, una testimonianza con il reale. Tutto ciò ci tranquillizza, riusciamo a controllare meglio, è lì, è visibile, non si può sbagliare. Fa paura affrontare il mondo del non sensibile e cerchiamo in ogni modo di trasferire gli oggetti e le regole della Matematica nel mondo del reale come se anche i concetti matematici avessero bisogno di una giustificazione reale per esistere. Mi ha molto stimolato lavorare sulle rappresentazioni, capire che sono utili, per dare corpo a qualcosa che non è concreto, ma che possono essere deboli perché non sempre, presentare modelli concreti in matematica, assicura un corretto apprendimento ma anzi lo condizionano e lo ostacolano. Ricordo Elena che dopo aver ragionato, parlato e ancora ragionato sul punto in matematica mi disse "Sì non lo vedo, ma lo capisco"».

Come commentare queste due significative riflessioni, se non con un breve, ma efficace, proverbio giapponese: *"Insegnare è imparare"* che vale anche per noi ricercatori ogni volta che entriamo in contatto con il ricco mondo della didattica.
Sembra che il nostro obiettivo è in parte stato raggiunto: incidere notevolmente sulle convinzioni degli insegnanti per poi incidere indirettamente su quelle degli allievi.

Viene spontaneo domandarsi come mai questa tesi relativa alle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria sull'infinito matematico si sia indirizzata in questo capitolo quasi esclusivamente sul punto e sulla sua trasposizione didattica; va quindi precisato che questo è stato il percorso che è si è prospettato davanti a noi in questi anni pur avendo sempre in mente come problematica principale quella dell'infinito. Si è in effetti rilevato come risulti impossibile trattare l'aspetto dell'infinito matematico in àmbito geometrico senza far riferimento agli enti primitivi della geometria. È proprio da misconcetti riguardanti questi oggetti matematici che derivano molte delle false credenze relative all'infinito, inoltre riteniamo che queste proposte rappresentano un modo nuovo di lavorare in classe, più elastico, più vicino alla "nostra" idea di matematica, in grado di favorire un avvicinamento da parte degli insegnanti e degli allievi al concetto di infinito.

4.5 Un altro importante aspetto: le diverse rappresentazioni del punto in matematica

Un altro fondamentale e delicato aspetto legato alla trattazione precedente riguarda le diverse rappresentazioni del punto in matematica. Ancora una volta si è scelto di trattare il punto, ma ovviamente queste riflessioni possono essere trasferite a tutti gli altri enti primitivi della geometria, e non solo. Da dove nascono le seguenti considerazioni? Più volte nel corso di questi capitoli abbiamo esplicitato come le difficoltà e i misconcetti dipendano spesso, per quanto riguarda l'infinito matematico, dalla rappresentazione visiva che si fornisce degli enti primitivi della geometria. Ma di che tipo è questa rappresentazione che viene fornita dall'insegnante e accettata dalla *noosfera*? Per gli enti primitivi della geometria si tende a dare un'unica rappresentazione o diverse rappresentazioni addirittura in registri semiotici[44] diversi? Quanto incide sulle convinzioni degli allievi la rappresentazione fornita dall'insegnante?
Prima di rispondere a queste domande, procediamo per gradi e analizziamo in dettaglio il quadro teorico di riferimento.

4.5.1 Il quadro teorico di riferimento

Per questa trattazione non possiamo che fare riferimento a Duval che in questi anni ha messo in evidenza come in Matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Questa problematica dei registri è stata presentata nei celebri articoli del 1988 (a, b, c); e nel successivo lavoro del 1993. Dunque prendendo a prestito da Duval l'affermazione: non c'è **noetica** (acquisizione concettuale di un oggetto) senza **semiotica** (rappresentazione realizzata per mezzo di segni), passiamo alle seguenti considerazioni.

Come riferisce D'Amore nel suo libro del 2003:

- ogni concetto matematico ha rinvii a "non-oggetti"; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta; in altre parole in Matematica non sono possibili rinvii estensivi;

[44] Partendo dall'impostazione di Duval che andremo ad esplicitare, quando si parla di "registro di rappresentazione semiotica" ci si riferisce ad un sistema di segni che permette di riempire le funzioni di comunicazione, trattamento, conversione e di oggettivazione.

- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci;
- si parla più spesso in Matematica di "oggetti matematici" che non di "concetti matematici" in quanto in Matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; *«la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza»* (Duval, 1998).

Come si percepisce da quest'ultimo punto, per Duval la nozione di concetto diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità per l'Autore è la coppia (segno, oggetto). Dell'importanza del segno parla anche Vygotskij in un passo del 1962, citato in Duval (1996), nel quale si dichiara che non c'è concetto senza segno. Assumendo tutto questo come vero, ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta del segno, anzi sarebbe meglio dire del sistema di segni, che rappresentano l'oggetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata. In D'Amore (2003) si riporta il pensiero di Duval che sostiene come, presso alcuni studiosi di didattica, si scorge una riduzione del *segno* ai *simboli convenzionali* che connotano direttamente e isolatamente degli oggetti, ma che possono portare a misconcetti dato che diventano rappresentanti unici di un dato registro e questo a nostro parere è ciò che avviene per gli enti primitivi della geometria. Il punto è percepito e riferito all'unica rappresentazione che viene comunemente fornita dalla *noosfera*: un pallino sulla lavagna; la retta ad una linea continua, di spessore variabile, diritta, formata da tre puntini iniziali e tre finali; nessuno ha il coraggio di osare uscendo da queste rappresentazioni, che vengono così percepite dagli insegnanti, e indirettamente dagli allievi, come le uniche plausibili e possibili. Come conseguenza di queste scelte univoche, si ha che il punto viene associato all'unica immagine che si fornisce: il segno "tondeggiante" lasciato su un foglio, di diametro variabile, avente una certa dimensione.

A.: «Non credo che ci siano altri modi per rappresentare un punto se non quello di toccare leggermente un foglio con una penna» (insegnante di scuola primaria)

R.: «Non ti viene in mente nient'altro? Con i tuoi allievi come fai?»

A.: «Se mi chiedi come lo rappresento, per forza per farlo faccio un piccolo segnetto sulla lavagna, ma se intendi anche che cosa dico quando ne parlo, di solito dico di considerare un granello di sabbia o un granello di sale».

Tra i modelli scelti dagli insegnanti per rappresentare il punto rientrano sempre immagini "tondeggianti", perché tra i misconcetti che possiedono si ritrova anche l'idea che la forma di un punto sia "sferica":

R.: «Secondo te, rappresentare un punto con una stella è lecito?»

A.: «Con una stella? Certamente no, che domanda è? Un punto non è mica una stella!»

R.: «Perché il punto è questo: •?»

A.: «Sì, il punto è sferico, non è certamente a forma di stella».

4.5.2 Un caso particolare del paradosso di Duval: gli enti primitivi

Analizziamo il famoso paradosso di Duval (1993) (citato in D'Amore 1999 e 2003): *«(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile».* Questa confusione si amplifica per gli enti primitivi della geometria, dato che vengono spesso lasciati semplicemente ad un atto di intuizione. Inoltre, a complicare l'apprendimento di questi oggetti matematici, si aggiunge la scelta di fornire all'allievo solo sterili e univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così accettate ciecamente a causa del *contratto didattico* instaurato in classe (vedi paragrafo 2.1) e del fenomeno *di scolarizzazione* (vedi paragrafo 2.4).

Il paradosso prosegue così: *«E, al contrario, come possono essi* (i soggetti) *acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche»* (Duval, 1993).

Rileggiamo il paradosso nel caso del punto matematico: noi auspichiamo come insegnanti che lo studente concepisca il punto matematico in modo concettuale, pensandolo come oggetto privo di dimensione, ma è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Sicuramente i soggetti in fase di apprendimento tenderanno a confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche, ma questo avviene a maggior ragione quando le rappresentazioni fornite risultano quasi esclusivamente univoche e convenzionali, come nel caso del punto e della retta, e quando non avviene da parte dell'insegnante un lavoro di mediazione tra l'"oggetto personale" e l'"oggetto istituzionale" (Godino e Batanero, 1994, Chevallard, 1991). Come fare allora con dei bambini di scuola primaria a parlare di punto senza disegnarlo in un unico modo sulla lavagna? Come è possibile svincolarsi da questa rappresentazione che rimane fissa e stabile trasformandosi in modello erroneo per gli insegnanti e per gli allievi? Come possono gli studenti acquisire padronanza nei *trattamenti*[45] matematici e nelle *conversioni*[46] legate alle rappresentazioni semiotiche se viene fornita sostanzialmente un'unica rappresentazione convenzionale per gli enti geometrici?

Le difficoltà sono sì legate al fatto che gli studenti non possono avere inizialmente un apprendimento concettuale degli oggetti matematici, ma sono amplificate dalla rivelazione che spesso questo apprendimento concettuale non è posseduto neanche dagli insegnanti che tendono a confondere la rappresentazione con l'oggetto matematico che intendono spiegare ai propri allievi (vedi cap. 3).

In questi anni di lavoro continuato con gli insegnanti è capitato diverse volte di rilevare come alcuni di loro attribuiscano l'esistenza di un concetto matematico alla possibilità di rappresentarlo tramite immagini o oggetti concreti:

S.:«L'infinito per me non esiste, non lo puoi mica vedere» (insegnante di scuola primaria)

R.: «Perché il 3 lo puoi vedere?»

S.: «Certo, basta che mostri 3 dita, che scrivi 3, che mostri 3 oggetti. Ma per l'infinito come fai?»

R.: «Allora nel tuo ragionamento, basta che scrivi così: ∞»[47]

S.: «No, però è diverso non lo puoi mica toccare come con le dita. Per me il 3 esiste e l'infinito no».

---

[45] Per *trattamento* si intende un'attività cognitiva caratteristica della semiotica che consiste nel passaggio da una rappresentazione ad un'altra all'interno dello stesso registro semiotico.

[46] Per *conversione* si intende un'attività cognitiva caratteristica della semiotica che consiste nel passaggio da una rappresentazione ad un'altra in registri semiotici diversi.

[47] In Rucker (1991) viene proposta una curiosità: il simbolo ∞ appare per la prima volta nel 1656 in un trattato sulle sezioni coniche di John Wallis, *Arithmetica Infinitorum* (si veda: Scott, 1938). Subito si diffonde un po' dovunque per indicare l'infinito o l'eternità nei più svariati contesti. Per esempio nel 1700 il simbolo dell'infinito cominciò ad apparire sulla carta del Matto nei Tarocchi, dove il simbolo cabalistico associato a questa carta è la lettera ebraica aleph $\aleph$.

Queste affermazioni evidenziano, ancora una volta, le false convinzioni che possiedono gli insegnanti sugli oggetti della matematica e più in generale sulla matematica stessa.
Come sostiene Fischbein (1993) è importante evidenziare che: *«Nelle scienze empiriche il concetto tende ad approssimare la corrispondente realtà esistente, mentre in matematica è il concetto, attraverso la sua definizione, che detta le proprietà delle figure corrispondenti. Questo porta ad una conseguenza fondamentale. L'intero processo investigativo del matematico può essere compiuto mentalmente, in accordo con un certo sistema assiomatico, mentre lo scienziato empirico deve, prima o dopo, tornare alle fonti empiriche. Per un matematico, la realtà può essere una fonte di ispirazione, ma mai oggetto di ricerca che porti a verità matematiche, e certamente non un esempio definitivo per provare una verità matematica. Il matematico, come il fisico o il biologo, usa osservazioni, esperimenti, induzioni, confronti, generalizzazioni, ma gli oggetti della sua indagine sono puramente mentali. Il suo laboratorio è, in linea di massima, confinato nella sua mente. Le sue prove non sono mai di natura empirica, ma solo di natura logica».*
Il paradosso di Duval risulta quindi ancora più accentuato se l'insegnante fa coincidere il concetto con la sua rappresentazione e se non ha mai riflettuto e strutturato la trasposizione didattica tenendo conto del senso e dell'importanza delle rappresentazione semiotiche.
Le considerazioni fin qui riportate, sono ancora una volta intimamente collegate con la problematica dei *concetti figurali* presentata da Fischbein (1993): *«Un quadrato non è un'immagine disegnata su un foglio di carta; è una forma controllata dalle sue definizioni (anche se può essere ispirata da un oggetto reale) (…) Una figura geometrica può allora essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica non è un puro concetto. È un'immagine, un'immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. (…) Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. (…) Gli oggetti di studio e di manipolazione nel ragionamento geometrico sono allora entità mentali, da noi chiamate concetti figurali, che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo possiedono qualità concettuali – come idealità, astrattezza, generalità, perfezione. (…) Abbiamo bisogno di uno sforzo intellettuale per capire che le operazioni logico-matematiche manipolano soltanto una versione purificata dell'immagine, il contenuto spaziale-figurale dell'immagine. (…) Idealmente, è il sistema concettuale che dovrebbe controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure. (…) Ma l'evoluzione di un concetto figurale generalmente non è un processo naturale. Di conseguenza, uno dei compiti*

principali della didattica della matematica (nel campo della geometria) è di creare situazioni didattiche che richiedano sistematicamente una stretta cooperazione tra i due aspetti, fino alla loro fusione in oggetti mentali unitari» ed è su tutte queste considerazioni che stiamo strutturando attività con le insegnanti di Milano. Queste esperienze puntano a valorizzare e a mettere in evidenza per gli enti primitivi della geometria varie rappresentazioni semiotiche in registri diversi, lasciando sbizzarrire la fantasia degli allievi e permettendo così di farli allontanare da falsi stereotipi ormai assunti come convenzionali; raggiungendo così *l'istituzionalizzazione della conoscenza* che porta alla conoscenza istituzionalizzata dei vari oggetti matematici. È proprio consentendo agli insegnanti e agli allievi di svincolarsi da rappresentazioni fisse e stabili che rappresentano "modelli erronei" (vedi cap. 3), che è possibile formare un'idea più vicina all'oggetto matematico che si vuole far apprendere. In questo modo cercheremo di far percepire, prima agli insegnanti e poi agli allievi, l'idea che la natura di un concetto non dipende dal tipo di rappresentazione che si è scelta per rappresentarlo, di modo che sia più semplice poi accettare la problematica dell'infinito.

4.5.3 Alcune proposte di attività

Le attività strutturate con le insegnanti di scuola primaria di Milano mirano a far percepire all'allievo la "debolezza" che hanno le rappresentazioni in matematica, per far sì che lo studente riesca a cogliere ciò che sta al di là dello specifico modello concreto (non solo figurale), dando un senso concettuale, dal punto di vista matematico, alle diverse immagini. L'allievo giungerà così a saper vedere con gli "occhi della mente", trovando così una giusta connessione tra i diversi aspetti tramite l'uso di vari linguaggi: verbale, gestuale, figurale, mentale.... In particolare riteniamo necessario strutturare attività che abbiano come fine ultimo la formazione di concetti figurali nel senso inteso da Fischbein (1993).

Allo stesso tempo, il nostro scopo è di far sì che l'allievo sia in grado di "osare" inventando rappresentazioni diverse per lo stesso concetto; questo consentirà allo studente di effettuare *trattamenti* ossia di passare da una rappresentazione ad un'altra all'interno dello stesso registro semiotico per lo stesso oggetto matematico e di effettuare *conversioni* tra una rappresentazione ed un'altra in registri semiotici diversi. «*Si può dire di più: che la conoscenza "è" l'intervento e l'uso dei segni. Dunque, Il meccanismo di produzione e d'uso, soggettivo ed intersoggettivo, di questi segni e di rappresentazione degli "oggetti" dell'acquisizione concettuale, è cruciale per la conoscenza*» (D'Amore, 2003).

Per fare questo, però, l'allievo deve essere capace di validare[48] e socializzare le sue scelte difendendo le proprie opinioni con giuste argomentazioni e sapendo accettare le motivazioni degli altri, in modo da creare rappresentazioni condivise e convenzionali all'interno della classe che saranno in seguito confrontate con quelle scelte dalla noosfera. Come sostiene D'Amore (2003): *«Durante l'apprendimento della Matematica, gli allievi vengono introdotti in un nuovo mondo concettuale e simbolico (soprattutto rappresentativo). Questo mondo non è frutto di una costruzione solitaria, ma il frutto di una vera e complessa interazione con i membri della microsocietà di cui il soggetto apprendente è parte: i propri compagni e gli insegnanti (e la noosfera, a volte sfumata, a volte presente)* (Chevallard, 1992). *È grazie ad un continuo dibattito sociale che il soggetto apprendente prende coscienza del conflitto tra "concetti spontanei" e "concetti scientifici", insegnare non consiste solo nel tentativo di generalizzare, amplificare, rendere più critico il "senso comune" degli studenti, si tratta di un'azione ben più complessa... Apprendere sembra dunque una costruzione sottoposta al bisogno di "socializzare", il che avviene grazie ad un mezzo comunicativo (che può essere il linguaggio) e che nella Matematica sarà condizionato dalla scelta del mediatore simbolico, cioè del registro di rappresentazione prescelto (o imposto, a vario titolo, anche solo dalle circostanze)».*

Perché il punto in matematica è rappresentato solo come un segno "tondeggiante"? La "rotondità", costituisce una sua proprietà matematica specifica?
Un punto in matematica dovrebbe essere un ente a-dimensionale, quindi la sua rappresentazione, necessaria per potersi capire, potrebbe essere di qualsiasi tipo, dato che non deve rispecchiare nessuna caratteristica particolare, se non quella di non poter essere eseguita. A nostro parere, la varietà di rappresentazioni permette agli allievi di purificare l'oggetto dalle proprietà che non gli sono proprie come: la grossezza, la pesantezza, il colore, la dimensione del diametro… Didatticamente è sufficiente stabilire una posizione nello spazio per caratterizzare un punto, mentre alla rappresentazione di questa posizione ci penseranno i

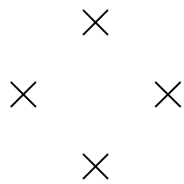
[48] La *validazione* è quel processo che si adotta e si segue per raggiungere la convinzione che un certo risultato ottenuto (o un'idea costruita) risponda davvero ai requisiti esplicitamente messi in campo; questo può avvenire quando un allievo propone una propria costruzione concettuale agli altri, mettendosi in situazione esplicitamente comunicativa, dirigendo così la sua attenzione alla trasformazione di un suo sapere personale privato in un prodotto di comunicazione e difendendo la propria opinione (o la propria risoluzione) contro gli "scettici" (validando appunto la propria costruzione).

bambini con la loro fantasia, la loro volontà, il loro gusto, rappresentando il punto matematico come l'estremo di una freccia, o l'incrocio di una crocetta, o il centro di una stellina.

La creazione del modello sbagliato derivante dalla rappresentazione univoca fornita per il punto è una situazione analoga a quella che si verifica nella scuola dell'infanzia quando l'insegnante tende a voler far apprendere al bambino il riconoscimento della forma quadrata consegnando sempre lo stesso modello concreto: rosso, di legno, di una determinata estensione, di un certo spessore. Il bambino crederà che le caratteristiche del quadrato siano proprio quelle di essere: rosso, di legno, di quella determinata grossezza; per riuscire a purificare il concetto di quadrato dalle proprietà che non lo caratterizzano, l'allievo dovrà avere l'opportunità di "vedere" diverse immagini in contesti diversi che gli consentiranno di raggiungere le caratteristiche di idealità, astrattezza, generalità, universalità, perfezione:[49] *«Il punto esiste solo nella mia mente, è come un fantasmino. Un fantasmino può essere attraversato da infiniti fantasmini»* (Luca, terza primaria).

Un giorno entrando in una classe terza dove le insegnanti stavano seguendo questo approccio i bambini hanno rivolto al ricercatore la seguente domanda:

«Prova a capire che cos'è questo». E hanno rappresentato alla lavagna la seguente immagine:



La risposta era: *«Quadrato»*.[50]

Successivamente hanno posto la seguente domanda:

[49] A questo proposito Locke (1690) affermava: *«Per quanto concerne le parole generali (cioè i nomi comuni), è chiaro che… il generale e l'universale non appartengono all'esistenza reale delle cose, ma sono invenzioni e creature dell'intelletto, fatte per il suo uso, e riguardano solamente i segni, siano parole o idee»*.

[50] A tal proposito Speranza (1996) afferma: *«Risaliamo ora all'antica Grecia. Dice Platone, nella Repubblica: «Quelli che si occupano di geometria… si valgono… di figure visibili, e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, ma a quelle di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in se stesso e sulla diagonale, anziché su quello o quella che disegnano…». (…). Platone parla di "quadrato in sé", del quale i quadrati disegnati sono "immagini". Ritroviamo qui il "mito della caverna": la vera realtà sono le idee generali, che hanno un'esistenza in sé: le cose sensibili sono solo "immagini", che noi vediamo come ombre, sul fondo di una caverna, delle vere entità che si trovano fuori»*.

«Che cos’è questo?»

e alla risposta del ricercatore: ***«Due punti»,***

i bambini hanno ribattuto così: *«No, riprova»*

R.: «Il segmento che ha come estremi quei due punti?»

B.: «No, riprova ancora. Dai che ce la fai!»

R.: «La retta che passa per quei due punti»

B.: «Brava Silvia, ora la possiamo disegnare»

I bambini hanno così mostrato di scegliere un modo alternativo anche per rappresentare la retta. In queste proposte rientra il “rischio personale” da parte dell’allievo, il suo impegno, la sua *implicazione* diretta nell’apprendimento, che si manifesta con la rottura del contratto didattico (vedi paragrafo 2.1). *«La necessità di questa rottura potrebbe essere riassunta dal seguente aforisma: Credimi, dice il maestro all’allievo, osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai»* (Sarrazy, 1995).

Se è vero come sostiene Duval (1993), che la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi è simbolo (storico) di progresso della conoscenza, con queste attività noi vogliamo attivare questo progresso all’interno della classe tenendo ben presenti tutte e tre le attività cognitive “caratteristiche della semiotica”: *rappresentazione, trattamento, conversione*. In particolare, alla conversione attribuiamo una posizione di rilievo, seguendo le motivazioni descritte in D’Amore (2003) e ancora prima in Duval (1993), tra le quali consideriamo prioritario il fatto che questa specifica attività cognitiva consenta di definire delle variabili indipendenti sia per l’osservazione che per l’insegnamento, permettendo la “concettualizzazione” che ha inizio realmente solo quando si mette in moto, anche solo abbozzandola, la coordinazione di due distinti registri di rappresentazione.

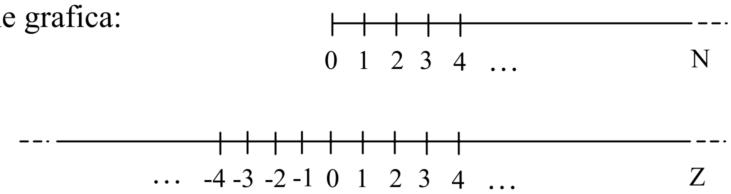
Altre attività strutturate dagli insegnanti vertono sulle principali differenze che vi sono tra l'àmbito finito e quello infinito, per far sì che il concetto di infinito non sia ridotto banalmente ad un'estensione del finito. La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito, infatti, richiede lo sviluppo di modelli intuitivi diversi e a volte addirittura opposti rispetto a quelli che si usano nel finito. A nostro avviso, per aggirare la creazione di misconcetti su questo tema bisognerebbe iniziare fin dalla scuola primaria un'opportuna educazione alla trattazione di insiemi infiniti che permetta all'allievo di cominciare a notare le principali differenze tra i due àmbiti. Gli obiettivi che ci siamo posti nello strutturare queste attività, sono principalmente il permettere all'allievo di cogliere l'essenza e il fascino della matematica; di riuscire a staccarsi dalla quotidianità del finito; di saper trasferire le corrispondenze biunivoche dal finito all'infinito; di intuire il significato dell'infinito sia in àmbito geometrico che numerico.

Da questo punto di vista riportiamo alcune affermazioni effettuate da un insegnante di scuola secondaria inferiore come conseguenza dell'aver proposto ai propri allievi alcune corrispondenze biunivoche tra insiemi infiniti (in particolare, tra l'insieme dei numeri naturali e pari, naturali e dispari, naturali e interi) delle quali era venuta a conoscenza durante il corso di formazione:

C.: «Provo un senso di liberazione da quando ho scoperto di poter posizionare i numeri in diversi modi. Sapere di poter giocare con l'ordinamento dei numeri diverte me e i miei allievi. A scuola di solito si è molto rigidi, non si esce mai dagli schemi».

L'insegnante si riferisce alla possibilità di trovare un ordine diverso rispetto a quello "naturale" per gli insiemi infiniti, come l'insieme dei numeri interi; questo le ha consentito di mostrare e di far scoprire ai bambini le corrispondenze biunivoche tra gli insiemi infiniti.

C.: «Dopo aver proposto questo ordine: 0, + 1, -1, +2, -2, +3, -3… per l'insieme dei numeri interi, un bambino me lo ha spontaneamente modificato così: 0, -1, +1, -2, +2, -3, +3… Ai bambini ha aiutato l'esempio del gioco della tombola, dove i numeri sono messi dentro il sacchetto in ordine sparso. Non li ha stupiti tanto questa attività, come invece aveva stupito me al corso, quindi la corrispondenza biunivoca tra N e Z mi è sembrato che l'abbiano accettata e capita senza alcun problema. Ho anche cercato di insistere meno sulla solita rappresentazione grafica che inganna veramente». (L'insegnante sta parlando della seguente rappresentazione grafica:



che porta a far ritenere, sia gli insegnanti che gli allievi, che il numero degli interi sia il doppio dei naturali, a parte lo zero che è l'elemento neutro).

Le attività menzionate, ed altre ancora, sono state la base per questo anno scolastico di articoli rientranti in laboratori didattici all'interno della rivista, assai diffusa in Italia, dal titolo: *La Vita scolastica*, rivolta a docenti di scuola primaria. Questo rappresenta a nostro parere un grande risultato, in quanto la problematica degli enti primitivi della geometria e dell'infinito matematico avrà così una ricaduta didattica sempre più ampia, consentendo a molti insegnanti di avvicinarsi a queste tematiche e alle problematiche ad esse collegate. Inoltre è significativo il fatto che gli articoli siano strutturati sotto forma di laboratori,[51] dove gli allievi diventano protagonisti *costruendo,* anche nel senso concreto del termine, oggetti che tentano di sradicare diversi misconcetti. In questo modo si instaurano meccanismi relazionali (insegnanti-allievi) molto particolari e relazioni cognitive (allievo-matematica) di estremo interesse teorico (Caldelli e D'Amore, 1986; D'Amore, 1988, 1990-91, 2001b).

4.6 Il "senso dell'infinito"

L'ultimo aspetto che vogliamo mettere in evidenza riguarda un lavoro di ricerca attualmente in corso che vede coinvolti 9 ricercatori appartenenti ai seguenti organi: NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia), DSE (Dipartimento di Scienze dell'Educazione, Ministero dell'Educazione, Bellinzona, Svizzera), ASP (Alta Scuola Pedagogica del Canton Ticino, Locarno, Svizzera), Mescud (Matemáticas Escolares Universidad Distrital, Univ. Distrital "Francisco J. de Caldas", Bogotà, Colombia).
L'idea nata da D'Amore verte sulla proposta di indagare, in diverse realtà e su un ampio ventaglio di soggetti, se esiste un "senso dell'infinito". Per capire che cosa si intende bisogna soffermarsi sul concetto di "stima", che per Pellegrino (1999) rappresenta: *«il risultato di un procedimento (conscio o inconscio) che tende a individuare il valore incognito di una*

[51] Come sostiene D'Amore (2001b): *«Il "Laboratorio": è un ambiente dove si fanno oggetti, si lavora concretamente, si costruisce qualche cosa; soprattutto è caratteristica del laboratorio una certa qual pratica inventiva; nel Laboratorio deve essere viva una tensione verso l'ideazione, la progettazione, la realizzazione di qualche cosa di non ripetitivo né banale, altrimenti basterebbe … un'officina».*

quantità o di una grandezza»; si tratta quindi di cogliere l'essenza del cardinale di una raccolta. Le abilità necessarie per essere un "buon estimatore", evidenziate da Pellegrino (1999), vertono su diversi fattori: psicologici, metacognitivi, affettivi e matematici. Le domande che ci siamo posti sono principalmente le seguenti: Che cosa accade se tale *valore incognito* è infinito? Esiste un "senso dell'infinito", così come esiste un "senso del numero finito"? Se sì, come si configura? Se no, perché? Si riesce a dare un senso intuitivo alla differenza tra l'infinito numerabile e l'infinito continuo?

Nella ricerca condotta nel 1996 con bambini di scuola primaria ci siamo imbattuti in affermazioni, riportate con estrema naturalezza, dalle quali emerge una sorta di mescolanza tra numeri finiti ed infiniti. Tanto per fare un esempio si riporta una conversazione avvenuta tra il ricercatore e due bambini dopo aver mostrato due segmenti di lunghezze diverse e dopo aver rivolto la domanda: ***«Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in questo»*:**

M.: «Abbiamo studiato che una linea è un insieme di punti»

I.: «La linea, non il segmento»

R.: «Lo sapete che cos'è un segmento?»

I.: «Sì, è una linea che ha l'inizio e la fine con due punti e i punti hanno le lettere» (Si nota un'incoerenza nelle risposte di I.: la linea è formata da punti, il segmento, pur essendo una linea, non è formato da punti).

R.: «Mentre in una linea?»

I.: «Ci sono tanti punti»

R.: «Quanti?»

M.: «Infiniti punti»

R.: «Ma allora anche qui nel segmento ci sono infiniti punti»

I.: «No, perché è delimitata» (Emerge anche nei bambini l'idea di infinito come illimitato già rilevata negli insegnanti nel paragrafo 3.7.1)

M.: «Non ce ne saranno così tanti come in questo (indica il segmento più lungo)»

R.: «Quindi, secondo te ce ne sono di più qui (indicando il segmento più lungo) ***che qua*** (indicando il segmento più corto)»

M.: «Dipende quanto sono larghi, se uno è largo un km e uno è largo un mm, ce ne possono stare due o un milione» (questa affermazione ricorda quelle degli insegnanti riportate nel paragrafo 3.7.2 e mette in evidenza anche una mancanza di "senso della misura")

R.: «Mentre nella linea?»

M.: «Dei miliardi»

M., pur avendo sostenuto che il numero dei punti in una linea sono infiniti, afferma in seguito che in una linea ci staranno dei miliardi di punti. Da che cosa dipende questa incoerenza? Solo dai misconcetti relativi agli enti primitivi della geometria rilevati nei paragrafi precedenti o può dipendere, per caso, anche da una totale impossibilità di darsi un'immagine dell'infinito in senso attuale? Non sarà, per caso, anche la totale impossibilità di compiere *stime dell'infinito*?

Gli stessi tipi di risultati si sono riscontrati anche in ricerche effettuate da Arrigo e D'Amore (1999, 2002) con studenti di scuola superiore.

Ma passiamo all'aspetto a nostro parere più interessante: gli insegnanti. Già in questa tesi (paragrafo 3.7.1) ci siamo imbattuti in docenti che dichiaravano curiose stime relative all'infinito, riportiamone solo alcune a mo' di esempio.

Alla domanda: *«Che cosa pensi che significhi: infinito matematico?»*

Un'insegnante di scuola primaria risponde:

C.: «Qualcosa che non si riesce a dire»

S.: «In che senso?»

C.: «Che non si sa quanto sia»

Altre insegnanti di scuola primaria hanno affermato:

A.: «Per me è un numero grande, talmente grande che non si può dire esattamente il suo valore»

B.: «Dopo un po', quando ci si stanca di contare si dice infinito per dire che è un numero sempre più grande»

M.:« Ciò che quantitativamente non misuro»

D.: «Qualcosa di così grande che nonostante gli sforzi è impossibile da catalogare completamente. La matematica, con la sua disciplina, prova a studiarne una parte»

Mentre due insegnanti di scuola secondaria inferiore scrivono su un foglio:

L.: «L'infinito matematico è quando non finisce mai, è una convenzione. Quando non so indicare l'"oltre" uso questo termine: infinito e lo indico con questo segno: ∞»

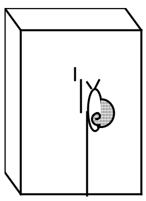
F: «L'infinito matematico è un mondo costituito da elementi che non si riesce a pensare in tutta la loro totalità».

Il fatto di concepire l'infinito come un numero finito grande, o come l'illimitato, o ancora come un procedimento così com'è stato rilevato nelle analisi riportate nel paragrafo 3.7.1, può dipendere dalla mancanza di capacità di *stima dell'infinito*?

Ci siamo dunque proposti di effettuare questa ricerca per giungere a dare risposta ad una serie di domande che, per spinta di D'Amore, abbiamo deciso di raccogliere in due grandi categorie: una soprattutto di carattere intuitivo e linguistico e l'altra più raffinata e tecnica. Dunque la prima chiama in causa studenti non troppo evoluti o persone non esplicitamente cólte in matematica (studenti senza preparazioni raffinate, insegnanti di scuola primaria, persone senza relazione con il mondo della scuola o con il mondo accademico di livello culturale medio – alto); la seconda riguarda più da vicino studenti evoluti o persone cólte in matematica [come, per esempio, insegnanti di matematica della scuola secondaria, studenti del corso di laurea in matematica (III e IV anno), specializzandi delle Scuole di Specializzazione]. La metodologia seguita consiste ancora una volta di TEPs (D'Amore e Maier, 2002) e di interviste, le motivazioni di questa scelta sono già state presentate nel paragrafo 4.3.

Non riporteremo in modo esplicito le domande di ricerca, né entreremo nel dettaglio dei contenuti dei TEPs e dei temi delle interviste: essi iniziavano tutti più o meno nello stesso modo, ma si evolvevano anche in modi nettamente diversi, a seconda della competenza o della maturità dell'intervistato. Di conseguenza, non anticiperemo neppure i risultati di questa ricerca, che presto saranno pubblicati, ma dato che stiamo parlando delle convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico, vogliamo terminare questa tesi con due interviste.

Dopo aver mostrato il seguente TEP…



Una lumaca vuole scalare un muretto.
Nella prima ora riesce a salire fino a metà.
Nella seconda ora, essendo stanca, sale solo la metà dello spazio percorso prima.
Nella terza ora, sempre più stanca, compie la metà del percorso fatto nell'ora precedente.
E così via...

Per me non arriverà mai in cima

Sì che ci arriverà: se pensi che dopo due ore ha già compiuto i tre quarti del cammino…

Tu che cosa ne pensi?

Insegnante di scuola primaria:
K.: «C'è un limite di tempo?»

R.: «No, non ci sono limiti»

K.: «Allora perché non dovrebbe arrivarci, ci arriverà»

K.: «½ + ½ di ½ + … Quanto fa questa somma qui? Io non lo so proprio. Dovrebbe fare la lunghezza del muretto, ma il tempo che ci mette non importa»

K.: «Fammi pensare… il muro ha una fine, l'altezza non dipende dal fatto che ce la faccia o meno, incide sul numero delle ore. Sì, ce la fa secondo me»

R.: «Quanto fa secondo te la somma che mi hai detto: «½ + ½ di ½ + …»

K.: «Potrebbe fare l'altezza del muretto»

R.: «In che senso?»

K.: «Che ci arriverà»

R.: «E quanto fa questa somma esattamente? Me lo sapresti dire?»

K.: «Infinito? Non lo escludo, che possa fare infinito. Sì, penso di sì… ma anche di no, non so. Queste cose non le so proprio fare».

Insegnante di scuola secondaria inferiore:

L.: «La lumaca non arriverà, per i miei gusti. Non ne so niente delle serie, comunque proviamo.

Ogni ora ci mette il percorso che ha fatto più la metà e la cosa continua all'infinito, quindi non arriva».

Nel frattempo stava scrivendo su un foglio:

x =

1° ora= ½ x

2° ora= ½ x + ¼ x

3° ora=½ + ¼ x + ½(½x + ¼ x)

4° ora = ½ x + ¼ x + ½(½x + ¼ x) + ½…

L.: «Da qua viene sempre una frazione del percorso intero che è x e più passa il tempo più rimane una frazione. Dai calcoli sembrerebbe che non ci riesce: si sommano sempre frazioni più piccole del percorso ma senza mai arrivarci. I trattini diventano sempre più piccoli, ma si sommano. Non ci arriverà mai».

Esiste quindi un *senso dell'infinito*? Le nostre analisi continuano in questa direzione e presto pubblicheremo i risultati di questa curiosa ricerca.

Abbiamo presentato in questo capitolo diverse linee di ricerca che stiamo seguendo attualmente o che abbiamo l'intenzione di indagare nel prossimo futuro. Questa complessa panoramica mette in evidenza come ogni volta che si tratta la tematica dell'infinito, si apra un mondo nuovo, tutto da studiare, analizzare e indagare in profondità che fa provare la sensazione, anno dopo anno, di essere solo all'inizio di questo "infinito" percorso. *«L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente lo spirito umano; nessuna altra idea ha stimolato così profondamente il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di* ***chiarificazione*** *che quello di infinito»* (Hilbert).

Ringraziamenti

I miei più sinceri e calorosi ringraziamenti sono rivolti al Prof. Bruno D'Amore per essere un grande "maestro" profondo, critico, scrupoloso, creativo, costante, disponibile e sensibile. A lui devo l'amore che nutro per la ricerca.

Ringrazio il Prof. Filippo Spagnolo per l'attenzione, i consigli e il supporto prestatomi durante l'intero percorso di questa tesi e le Prof.sse Fulvia Furinghetti e Rosetta Zan per i preziosi suggerimenti forniti.

Ricordo inoltre con affetto e gratitudine le insegnanti di Milano che in questi anni mi hanno dato grandi spunti di riflessione; in particolare: Luigina Cottino, Claudia Gualandi, Carla Nobis, Adriana Ponti e Mirella Ricci.

Un grazie va anche alla traduttrice di questa tesi: Monica Ricco, che è "entrata" in questa complessa tematica, riuscendo nell'arduo compito di tradurre in inglese le misconcezioni degli insegnanti e degli allievi.

Infine, due ringraziamenti personali: il primo è rivolto ai miei genitori per l'amore e l'incoraggiamento che mi hanno costantemente dimostrato in questi anni, a loro devo tutto ciò che sono; il secondo è indirizzato alla mia cara amica Sandra, per essere da sempre il mio più sincero e sicuro rifugio.

Bibliografia

Aglì F., D'Amore B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia*. Milano: Juvenilia.

Arrigo G., D'Amore B. (1993). *Infiniti*. Milano: Franco Angeli.

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo ma non ci credo...". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57.

Bachmann H. (1967). *Transfinite Zahlen*. Heidelberg: Springer-Verlag.

Bagni G.T. (1998). L'infinitesimo attuale e potenziale nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi. *L'educazione matematica*. XIX, V, 3, 2, 110-121.

Bagni G. T. (2001). Infinito e infinitesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore. *Bollettino dei docenti di matematica*. Maggio. 42, 9-20.

Bartolini Bussi M. G. (1987). Verso il concetto di numero. *Bambini*. Dicembre. 62-68.

Bartolini Bussi M. G. (1989). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. Parte II: Analisi di due casi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Maggio. 615-154.

Baruk S. (1985). *L'âge du capitain*. Paris: Seuil.

Bernardi C. (1992a). No one shall expel us… In: Speranza F. (a cura di). *Epistemologia della matematica*. Seminari 1989-91. Quaderni C.N.R. Pavia. 89-100.

Bernardi C. (1992b). Il concetto di infinito in matematica. Considerazioni didattiche. Atti del Convegno "XXXII Olimpiadi di Matematica". 49-56.

Boyer C.B. (1982). *Storia della matematica*. Milano: Mondadori (*A History of Mathematics*. New: York: John Wiley e Sons. 1968).

Bolzano B. (1965). *I paradossi dell'infinito*. Milano: Silva.

Bolzano B. (1985). *Del Metodo Matematico*. Torino: Boringhieri.

Borga M., Freguglia P., Palladino D. (1985). *I contributi fondazionali della scuola di Peano*. Milano: Franco Angeli.

Borges J. L. (1985). Il libro. *Il corriere Unisco*. Numero monografico. Roma: Unisco.

Bottazzini U. (1981). *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*. Torino: Boringhieri.

Brousseau G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*. 101, 3-4, 107-131.

Brousseau G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques.* 41, 177-182.

Brousseau G. (1983). Ostacles Epistemologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 4, 2, 165-198.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, 33-115.

Brousseau G. (1988). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x.* 21, 47-68.

Brousseau G. (1989). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique de mathématiques*. 9, 3, 309-336.

Brousseau G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France, Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud.* Grenoble: La Pensée Sauvage. 51-66.

Brousseau G., Pères J. (1981). Le cas Gaël. Université de Bordeaux I, Irem.

Caldelli M. L., D'Amore B. (1986). *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*. Firenze: La Nuova Italia.

Cantor G. (1932). *Gesammelte Abhandlngen*. Berlin: Springen-Verlag.

Cantor G. (1955). *Contributions to the Founding of Transfinite Numbers*. New York: Dover.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1988). *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation.* Irem d'Aix-Marseille. 14.

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 12, 1, 73-112.

Chevallard Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In: Arsac G., Chevallard Y., Martinand J. L., Tiberghien A. *La Transposition didactique à l'épreuve*. Grenoble: La Pensée Sauvage.135-180.

Chevallard Y., Joshua M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*. 3, 1, 159-239.

Cohen P. J. (1973). *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*. Milano: Feltrinelli.

Cornu L., Vergnioux A. (1992). *La didactique en questions*. Paris: Hachette.

D'Amore B. (1985). L'idea di "angolo" nell'antichità e sua evoluzione. *La matematica le scienze e il loro insegnamento*. Firenze. 1, 6-18.

D'Amore B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. In: AA. VV. (1987). *Atti del «II Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de la Matemática»*. Valencia: Universidad de Valencia. 323-324.

D'Amore B. (1988). Il laboratorio di Matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L'educazione matematica*. 3, 41-51.

D'Amore B. (1990-91). Imparare in laboratorio. *Riforma della scuola*. In 4 puntate sui numeri: 11 (novembre 1990); 1 (gennaio 1991); 5 (maggio 1991); 9 (settembre 1991).

D'Amore B. (1993a). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-301. [Ristampato in una versione ampliata in lingua tedesca: (1996). Schülersprache beim Löen mathematischer Probleme. *Journal für Matematik Didaktik*. 17, 2, 81-97].

D'Amore B. (1993b). Il problema del pastore. *La vita scolastica*. 2, 14-16.

D'Amore B. (1994). *Infinito vs Finito. Una querelle in nome dell'intuizione*. Tesi di Laurea in Filosofia.

D'Amore B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La matematica e la sua didattica*. 3, 322-335.

D'Amore B. (1997). Bibliografia in *progress* sul tema: «L'infinito in didattica della matematica». *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-305.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. III ed. 2001.

D'Amore B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La Matematica e la sua didattica*. 1, 4-30. [In lingua francese: Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position "naïve" dans une théorie "réaliste" contre le modèle "anthropologique" dans une théorie "pragmatique". In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. Atti del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno-6 luglio 2001. 131-162].

D'Amore B. (2001b). Nel segno della creatività. *La Vita Scolastica*. 1. Settembre 2001. 41-43.

D'Amore B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città.* Firenze: La Nuova Italia. 4, 56-82.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Pitagora: Bologna.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, Nicosia (Cipro), Intercollege Press Ed. Atti del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno -–6 luglio 2001. 111-130.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática* (México DF, México). 14, 1, 48-61.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica.* 3. 27-50.

D'Amore B., Giovannoni L. (1997). Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. Un'esperienza didattica nella scuola media. *La matematica e la sua didattica.* 4, 360-399.

D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione grafica. *La matematica e la sua didattica.* 2, 144-189.

D'Amore B., Martini B (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica.* 2, 150-175.

D'Amore B., Matteuzzi M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D'Amore B., Matteuzzi M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.

D'Amore B., Sandri P. (1996). Fa' finta di essere… Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 19, 3, 223-246.

D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18.

D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1989, 1992). *Lo sviluppo storico della matematica. Spunti didattici*. Roma: Armando. Vol. I (1989); vol. II (1992).

D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici.* Milano: Angeli.

De La Garanderie A. (1980). *Les profils pédagogiques.* Paris: Centurion.

Duval R. (1983). L'ostacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*. 14, 385-414.

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5, 37-65.

Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de L'École d'été 1995. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*. 3, 1996, 250-269].

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 16, 3, 349-382. [Trad. it. *La matematica e la sua didattica.* 3, 1996, 250-269].

Duval R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 6, 139-163.

El Bouazzaoni H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction.* Thèse de Doctorat. Bordeaux.

Enriques F. (1971). *Le matematiche nella storia e nella cultura*. Lezioni pubblicate per cura di Attilio Frajese. Bologna: Zanichelli.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Ferreri M., Spagnolo F. (1994). *L'apprendimento tra emozione ed ostacolo*. Quaderni di Ricerca in Didattica (GRIM di Palermo). 4.

Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.

Fischbein E. (1992). Intuizione e dimostrazione. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna: Pitagora. 1-24.

Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*. 24, 139-162.

Fischbein E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*. Infinity–The Never-ending Struggle. 48, 2-3.

Fischbein E., Engel I. (1989). Difficoltà psicologiche nella comprensione del principio di induzione matematica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 43-45.

Fischbein E., Jehiam R., Cohen D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa. 2, 352-359.

Fischbein E., Jehiam R., Cohen D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*. 29, 29-44.

Furinghetti F. (2002). *Matematica come processo socioculturale*. Trento: Iprase.

Gagatsis A., Panaoura G. (2000). Rappresentazioni semiotiche e apprendimento. Un esempio: la retta aritmetica. *Bollettino dei docenti di matematica*. 41, 25-58.

Galilei G. (1958). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Torino: Boringhieri.

Gardner H. (1993). *Educare al comprendere*. Milano: Feltrinelli.

Geymonat L. (1970). *Storia del pensiero filosofico e scientifico*. Milano: Garzanti.

Gilbert T., Rouche N. (2001). *La notion d'infini. L'infini mathématique entre mystère et raison*. Paris: Ellipses.

Gimenez J. (1990). About intuitional knowledge of density in Elementary School. *Atti del XIV PME*. Mexico. 19-26.

Giordan A., De Vecchi G. (1987). *Les Origines du Savoir*. Delachaux et Niestlé, 178.

Gödel K. (1940). *The consistency of the Continuum Hypothesis*. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press.

Godino J. D. (1993). La metafora ecologica en el estudio de la noosfera matematica. *Quadrante*. 2, 1, 9-22.

Godino J., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355. [Traduz. italiana Bologna: Pitagora, 1999, come libro nella collana: Bologna-Querétaro].

Hauchart C., Rouche N. (1987). *Apprivoiser l'infini*. Gem-Ciaco. Louvain-la-Neuve.

Henry M. (1991). *Didactique des Mathématiques*. IREM de Besançon. Besançon.

Hilbert D. (1925-1989). On the infinite. In: Benacerraf P., Putnam H. (eds.). *Philosophy of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Jonassen D.H. (1994). Thinking Tecnology. *Educational Technology*. 34-4, 34-37.

Kandinsky V.V. (1989). *Punto, linea, superficie*. Biblioteca Adelphi. 16.

Kant I. (1967). *Critica della ragion pura*. Torino: Utet. Ed. or.: 1781.

Kuyk W. (1982). *Il discreto e il continuo*. Torino: Boringhieri.

Locke J. (1690). *Saggio sull'intelletto umano*. Torino: Utet.

Lolli G. (1977). *Categorie, Universi e principi di riflessione*. Torino: Boringhieri.

Marchini C. (1992). Finito? In: Speranza F. (ed.). *Epistemologia della matematica. Seminari 1989-1991*. Quaderni CNR. 10. Parma. 101-134.

Marchini C. (2001). *Il problema ed il ruolo dell'infinito*. Appunti delle lezioni per la Scuola di Specializzazione.

Meschkowski H. (1967). *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors*. Vieweg, Braunschweig.

Moreno L.E., Waldegg G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 211-231.

Morschovitz Hadar N. (1991). The falsifiability Criterion and Refutation by Mathematical Induction. PME XV. Assisi. 41-48.

Nuñez Errazuriz R. (1994). A 3-dimension conceptual space of transformations for the study of the intuition of infinity in plane geometry. Atti del XV PME. Assisi. 109-116.

Pellegrino C. (1999). Stima e senso del numero. In: Jannamorelli B., Strizzi A. (1999). *Allievo, insegnante, sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica*. Atti del 4° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona (AQ), 23-25 aprile 1999. Sulmona: Qualevita ed. 145-147.

Pellerey M. (1993). Volli, sempre volli, fortissimamente volli. *Orientamenti Pedagogici*. 6, 1005-1017.

Perret Clermont A.N., Schubauer Leoni M.L., Trognon A. (1992). L'extorsion des réponses en situation asymmetrique. *Verbum* (Conversations adulte/enfants). 1/2, 3-32.

Perrin Glorian M.J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 97-147.

Polo M. (1999). Il contratto didattico come strumento di lettura della pratica didattica con la matematica. *L'educazione matematica*. XX, VI, 1, 4-15.

Porlán R. e altri (1996). Conocimiento profesional deseable y profesores innovadores. *Investiogación en la Escuela*. 29, 23-37.

Robinson A. (1974). *Non-standard analysis*. London: North-Holland.

Romero i Chesa C., Azcárate Giménez C. (1994). An inquiry into the concept images of the continuum. *Proceedings of the PME XVIII*. Lisboa. 185-192.

Rucker R. (1991). *La mente e l'infinito*. Padova: Franco Muzzio Editore.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*. 112, 85-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*. 2, 1998, 132-175].

Sbaragli S. (2003a). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Prima parte: 26A, 2, 155-186. Seconda parte: 26A, 5, 573-588.

Sbaragli S. (2003b). La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica*. Bellinzona (Svizzera). 47.

Schneider M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des «découpages infinis» des surfaces et des solides. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. 23, 241-294.

Schubauer Leoni M. L. (1988). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée. In: Perret Clermont A. N., Nicolet M. (eds.). *Interagir et connaître*. Cousset, Delval. 251-264.

Schubauer Leoni M. L. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. In: Bednarz N., Garnier C. (eds.). *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Ottawa: Agence d'Arc. 350-363.

Schubauer Leoni M. L. (1996). Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento. In: Gallo E., Giacardi L., Roero C. S. *Conferenze e seminari 1995-1996*. Associazione Subalpina Mathesis – Seminario di Storia delle Matematiche "T. Viola". Torino. 21-32.

Schubauer Leoni M. L., Ntamakiliro L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des sciences de d'éducation*. XX. 1. 87-113.

Scott J. F. (1938). *The Mathematical Work of John Wallis*. London: Taylor and Francis.

Selter C. (1994). *Eigenproduktionen im arithmetikunterricht der primarstufe*. Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

Shama G., Movshovitz Hadar N. (1994). Is infinity a wholer number? *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa. 2, 265-272.

Spagnolo F. (1995). Obstacles épistémologiques: le postulat de Eudoxe-Archimede. *Quaderni di Ricerca in Didattica* (GRIM di Palermo). 5.

Spagnolo F. (1998). *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*. Firenze: La Nuova Italia.

Spagnolo F., Margolinas C. (1993). Un ostacolo epistemologico rilevante per il concetto di limite: il postulato di Archimede. *La matematica e la sua didattica*. 4, 410-427.

Speranza F. (1992). Tendenze empiriste nella Matematica. *Quaderni di Epistemologia della Matematica*. CNR, Progetto TID-FAIM. 10, 77-88. [Ristampato in: Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora. 57-64].

Speranza F. (1996). "Il triangolo qualunque" è un qualunque triangolo? *L'educazione matematica*. V, 1, 1, 13-28.

Sternberg R. (1996). Stili di pensiero. In: Vinello R., Cornoldi C. (eds.) (1996). *Metacognizione, disturbi di apprendimento e handicap.* Hillsdale: L.E.A.

Struik D.J. (1948). *A concise history of mathematics*. New York: Dover Publ. Inc.

Tall D. (1980). The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 271-284.

Tall D. (2001a). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics.* Infinity – The Never-ending Struggle. 48, 2-3.

Tall D. (2001b). A child thinking about infinity. *Journal of Mathematical Behavior*. 20. 7-19.

Tsamir P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica.* 2, 167-207.

Tsamir P., Tirosh D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVI PME*. Durham NH. 90-97.

Tsamir P., Tirosh D. (1994). Comparing infinite sets: intuition and representation. *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa. 2, 345-352.

Tsamir P., Tirosh D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica*. 2, 122-131.

Waldegg G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 5, 19-36.

Zellini P. (1993). *Breve storia dell'infinito*. Milano: Adelphi.